OSTWALD'S KLASSIKER
DER EXAKTEN WISSENSCHAFTEN.
Nr. 82.

Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander

von

JACOB STEINER.

1. Teil.

WILHELM ENGELMANN IN LEIPZIG

IX Klassiker, Ostwald's

Systematische Entwicklung

der

ABHÄNGIGKEIT GEOMETRISCHER GESTALTEN

von einander,

mit Berücksichtigung der Arbeiten alter und neuer Geometer über Porismen, Projections-Methoden, Geometrie der Lage Transversalen, Dualität, und Reciprocität, etc.

von

JACOB STEINER.

»En observant ce que les résultats particuliers
»avaient de commun entre eux, on est succes-
»sivement parvenu à des résultats fort étendus,
»et les sciences mathématiques sont à la fois
»devenues plus générales et plus simples.«

LAPLACE, Leçons à l'Ecole normale.

Erster Theil.

Herausgegeben

von

A. J. von Oettingen.

Mit 2 Tafeln und 14 Figuren im Text.

LEIPZIG
VERLAG VON WILHELM ENGELMANN
1896.

Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander.

Von

Jacob Steiner.

[V] Vorrede.

Das vorliegende Werk enthält die Endresultate mehrjähriger Forschungen nach solchen räumlichen Fundamentaleigenschaften, die den Keim aller Sätze, Porismen und Aufgaben der Geometrie, womit uns die ältere und neuere Zeit so freigebig beschenkt hat, in sich enthalten. Für dieses Heer von auseinander gerissenen Eigenthümlichkeiten musste sich ein leitender Faden und eine gemeinsame Wurzel auffinden lassen, von wo aus eine umfassende und klare Uebersicht der Sätze gewonnen, ein freierer Blick in das Besondere eines jeden und seiner Stellung zu den übrigen geworfen werden kann. Wenn Jemand alle bis jetzt bekannt gewordenen Sätze und Aufgaben nach den bisher üblichen Vorschriften zu beweisen und zu lösen sich vornehmen wollte, so wäre dazu viel Zeit und Mühe erforderlich, und am Ende hätte man doch nur eine Sammlung von auseinander liegenden, wenn auch sehr scharfsinnigen, Kunststücken, aber kein organisch zusammenhängendes Ganze zu Stande gebracht. Gegenwärtige Schrift hat es versucht, den Organismus aufzudecken, durch welchen die verschiedenartigsten Erscheinungen in der Raumwelt mit einander verbunden sind. Es giebt eine geringe Zahl von ganz einfachen Fundamentalbeziehungen, worin sich der Schematismus ausspricht, nach welchem sich die übrige Masse von Sätzen [VI] folgerecht und ohne alle Schwierigkeit entwickelt. Durch gehörige Aneignung der wenigen Grundbeziehungen macht man sich zum Herrn des ganzen Gegenstandes; es tritt Ordnung in das Chaos ein, und man sieht, wie alle Theile naturgemäss in einander greifen, in schönster Ordnung sich in Reihen stellen, und verwandte zu wohlbegrenzten Gruppen sich vereinigen. Man gelangt auf diese Weise gleichsam in den Besitz der Elemente, von welchen die Natur ausgeht, um mit möglichster Sparsamkeit und auf die einfachste Weise den Figuren unzählig viele Eigenschaften verleihen zu können. Hierbei macht weder die synthetische, noch die analytische Methode, den Kern der Sache aus, der darin besteht, dass die Abhängigkeit der Gestalten von einander, und die Art und Weise aufgedeckt wird, wie ihre Eigenschaften von den einfachern Figuren zu den zusammengesetztern sich fortpflanzen. Dieser Zusammenhang und Uebergang ist die eigentliche Quelle aller übrigen vereinzelten Aussagen der Geometrie. Eigenschaften der Figuren (wie z. B. die conjugirten Durchmesser der Kegelschnitte; sechs Punkte oder Strahlen, welche Involution bilden; das mystische Sechseck und Sechsseit; u. s. w.), von deren Vorhandensein man sich sonst durch künstliche Beweise überzeugen musste, und die, wenn sie gefunden waren, als etwas Wunderbares dastanden, zeigen sich nun als nothwendige Folgen der unscheinbarsten Eigenschaften der aufgefundenen Grundelemente, und jene sind a priori durch diese gesetzt.

Wenn nun wirklich in diesem Werke gleichsam der Gang, den die Natur befolgt, aufgedeckt [**VII**] wird, so werden alle hier synthetisch entwickelten Resultate sich natürlicher Weise auch durch analytische Hülfsmittel auffinden lassen, was meines Erachtens durchaus nichts Ueberraschendes in sich tragen kann. Der Analyst, der dieses ausführt, hat nicht mehr als seine Pflicht gethan, wenn er jeden Fortschritt der Wissenschaft benutzt, und sich denselben so zur Lehre dienen lässt, dass seine Methode darnach vervollständigt wird. Auch ist es recht eigentlich seine Sache, jene Resultate zu verallgemeinern, und ich sollte meinen, dass seine Arbeit nicht an ihrem Werthe verlieren würde, wenn er es unterliesse, gegen seinen Wegweiser sich vornehm zu geberden.

Der Streit, welcher sich vor nicht langer Zeit zwischen den zwei, in Rücksicht auf die Geometrie verdienstvollsten, französischen Mathematikern über den Vorzug des Princips der Dualität und der *Théorie des polaires réciproques* entspann*), wird, wie ich glaube, durch die vorliegende Entwickelung unzweideutig entschieden, so dass ich es nicht für nöthig halte, hier darauf weiter einzugehen. Die Dualität tritt mit den Grundgebilden zugleich hervor, jene Theorie hingegen kommt erst später, als Resultat bestimmter Verbindungen der Grundgebilde, zum Vorschein. Wenn aber auch das *Gergonne'sche* Princip sich in dieser Hinsicht als das primitivere, der Quelle näher liegende, bewährt, so hat doch *Poncelet* ein gleich grosses Verdienst, so viel zur Entwickelung und Förderung der synthetischen Geometrie beigetragen zu haben, dass diese [VIII] fortan nicht mehr mit jener Geringschätzung behandelt werden darf, welche man ihr in neuerer Zeit gar zu oft und gar zu leichtfertig zu Theil werden liess. Uebrigens tritt die genannte Theorie durch die gegenwärtige Entwickelung in vollständigerer und allgemeinerer Gestalt hervor, als es in ihrer früheren Darstellungsweise geschehen konnte, wobei indessen nicht zu übersehen ist, dass der scharfsinnige *Moebius* zuerst eine freiere Auffassung dieser Theorie ans Licht gefördert hat (Barycentr. Calcül).

Das ganze Werk wird seiner äusseren Eintheilung nach aus fünf Theilen und zugleich aus fünf Abschnitten bestehen, von denen der erste: »projectivische Gerade, ebene Strahlbüschel und Ebenenbüschel;« der zweite: »projectivische Ebenen und Strahlbüschel (im Raume);« der dritte: »projectivische Räume;« der vierte: »Correlations-Systeme und Netze (mit Einschluss der Involutions-Systeme und Netze);« und der fünfte: »ausführliche und umfassende Behandlung der Curven und Flächen zweiten Grades, durch Construction und gestützt auf projectivische Eigenschaften,« enthält. Ausserdem werden noch zwei Theile mit diesem Werke in Verbindung gebracht, wovon der eine: »über Punkte und Axen der mittlern Entfernung (mit Einschluss der mittlern harmonischen Entfernung), über Transversalen, etc.« handeln wird, und worauf vorhergegangene projectivische Eigenschaften angewandt werden; der andere Theil hingegen der Elementargeometrie gewidmet ist, und der Hauptsache [IX] nach: »eine systematische Entwickelung der Aufgaben und Sätze über das Schneiden und Berühren

---

*) *Bulletin universel*, août 1827, pag. 109, und *Annales de Mathématiques*, tom. XVIII, pag. 125.

der Kreise in der Ebene und auf der Kugelfläche, und der Kugeln« enthalten wird. Dieser letztere Theil sollte schon früher im Druck erscheinen und war bereits im J. 1826 bis auf einen Anhang, welcher verschiedene Anwendungen der stereographischen Projection enthalten sollte, ausgearbeitet, was auch schon anderweitig angegeben worden (Journal f. Mathem. Bd. I, S. 163); allein da mehrere darin enthaltene Betrachtungen nur besondere Fälle von solchen sind, welche in den erstgenannten fünf Theilen vorkommen, und wiederum einige über Kreise und Kugeln selbständig entwickelte Sätze sich unmittelbar auf bestimmte Systeme von Curven und Flächen zweiten Grades übertragen lassen, wie solches in jenen fünf Theilen nachgewiesen wird: so ist es zweckmässiger, ihn erst nach diesen folgen zu lassen.

Die Hauptresultate, welche in diesem Werk entwickelt werden, habe ich schon vor mehreren Jahren gefunden (und zwar die letzten vor der Mitte des Jahres 1828), in einer Epoche wo mir, als Privatlehrer, mehr Zeit und Musse zu Gebote stand, als seither, wo nicht selten drückende Amtsgeschäfte die Ausarbeitung verzögerten. Dass mittlerweile Einiges davon ins Publicum gekommen ist (wie z. B. namentlich ein Theil der Resultate in § 59 dieses Bandes), ist leicht erklärlich, da ich kein Geheimniss daraus machte. Diese Theilnahme war mir ein Beweis, dass meine Untersuchungen Beifall finden, sie erregt jetzt in mir die Hoffnung, dass nun auch die vollständige [X] Mittheilung derselben nicht unberücksichtigt bleiben werde, denn es ist nicht unwahrscheinlich, dass durch gehörige Verschmelzung von Resultaten und Ideen des Einen mit Methoden des Andern noch mehr als eine neue Entdeckung sich machen lassen werde.

Da frühere Arbeiten von mir, welche ich in einzelnen Abhandlungen im Journal für Mathematik und in den Annales de Mathématiques bekannt gemacht habe, den Beifall von unparteiischen Sachkennern sich erworben haben*),

---

*) Siehe *Annales de Mathém.* tom. XVII (Nr. 7, 10), XVIII u. XIX; *Bulletin des sciences mathématiques*, tom. VII, VIII, IX, X. u. XI, 1827—1829; Allgemeine Literatur-Zeitung, 1831; Mathemat. Wörterb. Thl. 5 u. 6; u. s. w. Auch sind viele Resultate daraus schon in Lehrbücher und andere Werke aufgenommen worden, sowie auch eine Abhandlung und mehrere einzelne meiner Sätze von *Gergonne*, dem Herausgeber der genannten Annalen, ins Französische übersetzt worden sind.

so glaube ich wohl mit einiger Zuversicht die Hoffnung hegen zu dürfen, dass nun auch der gegenwärtigen Arbeit, welche nach derselben Methode, aber in einer allgemeineren, umfassenderen Anlage begonnen ist, eine nicht minder günstige Aufnahme zu Theil werden wird. Hierzu füge ich den Wunsch, dass der geneigte Beurtheiler die von mir unterlassene Auseinandersetzung des Verhältnisses meiner Arbeit zu den ältern und neuern Arbeiten Anderer über denselben Gegenstand ergänzen möge. Alle wichtigern, schon von Andern aufgestellten Sätze habe ich, so weit mein Wissen reichte, ihren Urhebern einzeln zugeschrieben.

Berlin, im September 1832.

Steiner.

[XIII]

Einleitende Begriffe.

1. Die in der Geometrie erforderlichen Grundvorstellungen sind: der Raum, die Ebene, die Gerade (gerade Linie) und der Punkt. Zum Behufe der in dem vorliegenden Werke durchzuführenden Betrachtungen ist es erforderlich einerseits, diese Elemente in Ansehung der Art und Weise, wie sie einander untergeordnet sind, d. h., wie die einen die anderen in sich enthalten, und andererseits, bestimmte Zusammenstellungen derselben auf folgende Weise scharf aufzufassen und als Grundgebilde festzuhalten.

I. Die Gerade. In der Geraden sind eine unzählige Menge unmittelbar auf einander folgender Punkte denkbar, die sich, von irgend einem derselben ausgehend, nach zwei entgegengesetzten Seiten hin ins Unendliche erstrecken.

II. Der ebene Strahlbüschel. Durch jeden Punkt in einer Ebene sind unzählige Gerade möglich; die Gesammtheit aller solcher Geraden soll »ebener Strahlbüschel«, oder »Strahlbüschel in der Ebene« heissen, nämlich die Geraden sollen, in Ansehung dieser Zusammenstellung, »Strahlen«

heissen, und der Punkt, in welchem sich die Strahlen schneiden, soll »Mittelpunkt« des Strahlbüschels genannt werden.

III. Der Ebenenbüschel. Durch jede Gerade sind unendlich viele Ebenen denkbar; alle solche Ebenen zusammengefasst sollen »Ebenenbüschel«, und [XIV] die Gerade, in welcher sich die Ebenen schneiden, soll »Axe« des Ebenenbüschels heissen.

IV. Die Ebene. In der Ebene sind zahllose Gerade und Punkte, oder ebene Strahlbüschel enthalten. (Jeder Punkt der Ebene ist Mittelpunkt eines in ihr liegenden Strahlbüschels.)

V. Der Strahlbüschel im Raume. Durch jeden Punkt im Raume sind, nach allen möglichen Richtungen, unzählige Gerade oder Strahlen denkbar; alle solche Strahlen insgesammt sollen »Strahlbüschel im Raume«, oder schlechthin »Strahlbüschel«, und der Punkt, in welchem sich die Strahlen schneiden, soll »Mittelpunkt« des Strahlbüschels heissen. Ein solcher Strahlbüschel enthält nicht nur unendlich viele Strahlen, sondern er umfasst auch zahllose ebene Strahlbüschel (II.) und Ebenenbüschel (III.) als untergeordnete Gebilde oder Elemente, denn es giebt endlos viele Ebenen, die durch dessen Mittelpunkt gehen, und alle Strahlen, die in eine solche Ebene fallen, bilden einen ebenen Strahlbüschel, und alle solche Ebenen, die durch einen und denselben Strahl gehen, bilden einen Ebenenbüschel; von solchen ebenen Strahlbüscheln und Ebenenbüscheln soll aber gesagt werden, sie liegen im Strahlbüschel im Raume.

Die Betrachtung der vorstehenden fünf Raumgebilde, nämlich das Beziehen derselben aufeinander bei verschiedenartigen Verbindungen und Zusammenstellungen, macht den Gegenstand der ersten fünf Theile des vorliegenden Werkes aus. Das Ergebniss wird zeigen, dass diese Gebilde in der That die eigentliche Grundlage der synthetischen Geometrie sind.

Die Fundamentalbeziehungen, auf welchen alle Untersuchungen beruhen, sind folgende.

Es werden aufeinander bezogen:

a) Gerade und ebene Strahlbüschel. Zuerst werden eine Gerade und ein ebener Strahlbüschel aufeinander bezogen, so dass ihre Elemente [XV] gepaart sind, d. h., dass jedem Punkt der Geraden ein bestimmter Strahl des Strahlbüschels entspricht. Sodann werden sowohl Gerade unter sich, als ebene Strahlbüschel unter sich ähnlicherweise aufeinander bezogen.

b) Ebenenbüschel und sowohl Gerade als ebene Strahlbüschel. Ein Ebenenbüschel und eine Gerade, oder ein ebener Strahlbüschel werden aufeinander bezogen, so dass ihre Elemente gepaart sind, d. h., dass jeder Ebene des Ebenenbüschels ein bestimmter Punkt der Geraden, oder ein bestimmter Strahl des Strahlbüschels entspricht. Aehnlicherweise werden Ebenenbüschel unter sich aufeinander bezogen.

c) Ebenen und Strahlbüschel (im Raume). Zuerst werden eine Ebene und ein Strahlbüschel so aufeinander bezogen, dass ihre Elemente sich wie folgt entsprechen:

jedem Punkt in der Ebene	.....	ein Strahl im Strahlbüschel,
jeder Geraden in der Ebene	.....	eine Ebene im Strahlbüschel.

Sodann geschieht die Beziehung auch so, dass ihre Elemente einander in anderer Ordnung entsprechen. Aehnlicherweise werden sowohl Ebenen unter sich, als Strahlbüschel unter sich aufeinander bezogen.

d) Räume unter sich. Zuerst werden zwei Räume (d. h. der ganze oder absolute Raum doppelt gedacht, so dass beide Räume einander durchdringen) so aufeinander bezogen, dass jedem Element des einen Raumes ein bestimmtes, gleichartiges Element des andern Raums entspricht; und weiter werden sie so aufeinander bezogen, dass auch ungleichartige Elemente einander entsprechen.

So wie die Grundgebilde ihrer Natur nach einander entgegengesetzt sind, nämlich [**XVI**]

α) die Gerade ..... dem ebenen Strahlbüschel,
β) die Gerade ..... dem Ebenenbüschel,
γ) der ebene Strahlbüschel ..... dem Ebenenbüschel,
δ) die Ebene ..... dem Strahlbüschel

und sich solchergestalt aufeinander beziehen lassen, dass ihre Elemente einander paarweise entsprechen: eben so stehen auch, im Allgemeinen, ihre Eigenschaften, ihre Verbindungen (zu Figuren) und die aus diesen hervorgehenden Sätze einander auf bestimmte Weise entgegen, d. h. kommen der einen Art von Gebilden gewisse Eigenschaften oder Sätze zu, so finden bei der jedesmaligen entgegengesetzten Art von Gebilden ebenfalls bestimmte, jenen entsprechende, aber ihnen entgegengesetzte, Eigenschaften und Sätze statt. Das Wesen dieser Dualität von Eigenschaften und Sätzen ist also durch die Grundgebilde selbst, d. h. durch die umfassende Vorstellung der Raumelemente, nothwendig bedingt. Damit die Begründung dieser Dualität auf naturgemässe, klare Weise hervortrete, und sich als wahr bewähren möge, soll die Betrachtung, so viel es sich thun lässt, so geführt werden, dass die einander entgegenstehenden Gebilde immer zugleich untersucht, ihre entsprechenden Eigenschaften und Sätze zugleich entwickelt und neben einander gestellt werden.

Der Hauptinhalt, oder das Wesentliche der gesammten Resultate, die durch dieses Werk erzielt und erreicht werden, besteht, wie es sich schon aus der vorstehenden Uebersicht ohngefähr entnehmen lässt: »In Untersuchungen über die Abhängigkeit der Gestalten (Figuren) von einander.«

[1] # Erster Abschnitt.

Betrachtung der Geraden, der ebenen Strahlbüschel und der Ebenenbüschel in Hinsicht ihrer projectivischen Beziehungen unter einander.

Erstes Kapitel.

Von projectivischen Geraden und ebenen Strahlbüscheln in der Ebene.

Eine Gerade und ein ebener Strahlbüschel.

2. Befinden sich ein ebener Strahlbüschel B (Fig. 1) und irgend eine Gerade A, die nicht durch dessen Mittelpunkt geht, in einer Ebene, so haben sie folgende Beziehung zu einander.

Durch jeden Punkt $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$,..... der Geraden geht ein Strahl a, b, c, d,..... des Strahlbüschels, und umgekehrt, jeder Strahl des letzteren begegnet der Geraden in irgend einem Punkte. Um die Aufeinanderfolge der Strahlen sowohl als der Punkte richtig aufzufassen, lasse man in der Vorstellung einen Strahl sich bewegen, so dass er nach und nach in die Lage eines jeden der übrigen gelangt, so wird der ihm zugehörige Punkt gleichzeitig die Gerade durchlaufen, und nach und nach [2] die Stelle eines jeden der übrigen Punkte einnehmen. Man lasse z. B. den Strahl p, vom Mittelpunkt B aus betrachtet, sich rechtsherum bewegen, so dass er nacheinander in die Lage von d, a, f, q, h, c, b kommt, so wird der Punkt $\mathfrak{p}$ die Gerade so durchlaufen, dass er nacheinander in die Stellen $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}$ gelangt, und folglich sich stets nach einer und derselben Richtung hin bewegt. Nur in der einzigen besonderen Lage des Strahles, wo er nämlich mit der Geraden A parallel ist, welches etwa bei q der Fall sein mag, findet kein wirkliches Schneiden desselben mit der Geraden statt; da aber sowohl vor als nach dieser Lage stets ein wirkliches Schneiden statt findet, und zwar, da der unmittelbar vorhergehende Durchschnitt in der grösstmöglichen Ferne auf der Seite über $\mathfrak{h}$ hinaus, und der unmittelbar nachfolgende Durchschnitt in der grösstmöglichen Ferne auf der anderen Seite über $\mathfrak{f}$ hinaus liegt, so soll in der Folge der Uebereinstimmung wegen gesagt werden, der Strahl q sei nach dem unendlich entfernten Punkte der Geraden A gerichtet, und es soll dieser unendlich entfernte Punkt, wenn gleich derselbe in der Figur nicht wirklich anzutreffen ist, durch $\mathfrak{q}$ bezeichnet werden. Demnach hätte die Gerade A nur einen unendlich entfernten Punkt $\mathfrak{q}$, und man kann sich denselben sowohl nach der einen Seite (über $\mathfrak{h}$ hinaus) als nach der anderen (über $\mathfrak{f}$ hinaus) hin liegend vorstellen.*) Auch folgt hiernach, dass umgekehrt ein [3] Strahl, der nach dem unendlich entfernten Punkte der Geraden A gerichtet ist, nothwendiger Weise mit ihr parallel sein muss.

Von den Punkten in der Geraden A zeichnet sich demnach einer vor allen übrigen auf eine eigenthümliche und bestimmte Weise aus, nämlich der unendlich entfernte Punkt $\mathfrak{q}$. Die besondere Eigenschaft dieses Punktes gewährt in der Folge öfter grosse Vortheile, wenn man ihn anstatt irgend eines der übrigen Punkte zu Hülfe nimmt. Der ihm zugehörige Strahl q, der nämlich mit der Geraden A parallel ist, soll von nun an »Parallelstrahl« heissen. Dieser Strahl gewährt ähnliche Vortheile, wie jener Punkt, nach welchem er gerichtet ist.

Hat man auf obige Weise einen ebenen Strahlbüschel B und eine Gerade A dergestalt auf einander bezogen, dass

*) Dass in einer Geraden nur ein einziger unendlich entfernter Punkt gedacht werden darf, wird in der Folge durch viele unbestreitbare Thatsachen bestätigt werden. Dahin gehören z. B. die Asymptoten der Hyperbel. Eine Gerade kann bekanntlich die Hyperbel nur in einem Punkt berühren. Nun wird aber allgemein die Asymptote als Tangente angesehen, deren Berührungspunkt unendlich entfernt ist; da aber zwei Arme der Hyperbel, nach entgegengesetzten Seiten hin, sich der Asymptote ins Unendliche fort gleichmässig nähern, so muss folglich ihr Berührungspunkt sowohl nach der einen als nach der andern Seite hin unendlich entfernt liegen, und folglich ist in der Asymptote nur ein einziger unendlich entfernter Punkt anzunehmen.

ihre Elemente paarweise zusammengehören, nämlich dass die Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots$. in der Geraden A den Strahlen $a, b, c, d \ldots$. im Strahlbüschel B entsprechen, so kann man diese Beziehung festhalten, während man die Gebilde (A, B) selbst auf irgend eine Weise ihre ursprüngliche Lage ändern lässt, d. h., man kann dieselben in eine solche Lage denken, wie etwa in (Fig. 2), wo zwar nicht mehr die Strahlen des Strahlbüschels durch die ihnen entsprechenden Punkte der Geraden gehen, aber wo sowohl jene Strahlen für sich, als diese Punkte für sich ihre gegenseitige Lage nicht geändert haben. Jede solche veränderte Lage der Gebilde, wo nämlich die Strahlen des Strahlbüschels B nicht mehr [4] durch die ihnen ursprünglich zugehörigen Punkte der Geraden A gehen, soll fortan »schiefe Lage« heissen, wogegen die ursprüngliche Lage »perspectivisch« genannt werden soll. Ferner sollen die Gebilde A, B, wenn sie auf die angegebene Weise aufeinander bezogen sind, dass nämlich ihre Elemente (Punkte und Strahlen) nach der Ordnung, in der sie einander paarweise entsprechen, bestimmt und festgehalten sind, »projectivisch« heissen. Wenn übrigens in der Folge gesagt wird, zwei Gebilde A, B seien perspectivisch, so will dies so viel sagen, als die Gebilde seien projectivisch und befinden sich in perspectivischer Lage.

Die so eben festgestellten Benennungen, die leicht unpassend scheinen dürften, werden durch ihre Uebereinstimmung mit anderen Benennungen, welche ganz sachgemäss sind, und weiter unten festgesetzt werden, gerechtfertigt.

3. Befinden sich ein ebener Strahlbüschel B und eine Gerade A, die projectivisch sind, in perspectivischer Lage, so ist mit jedem Strahl des Strahlbüschels der ihm entsprechende Punkt in der Geraden, und umgekehrt mit dem letzteren der erstere unmittelbar gegeben. Anders verhält es sich, wenn sich die Gebilde in schiefer Lage befinden. Hier wird man nur, wenn mehrere entsprechende Elementenpaare gegeben sind, durch dieselben mittelst bestimmter Gesetze (Relationen) zu jedem anderen Element des einen Gebildes das entsprechende Element des andern Gebildes finden, oder die Gebilde in ihre ursprüngliche, perspectivische Lage zurückbringen können. Diese Gesetze sollen nun zunächst gesucht werden.

Die Punkte in der Geraden A sind unter sich durch ihre Abstände von einander, und die Strahlen [5] des Strahlbüschels B sind unter sich durch die zwischen ihnen liegenden Winkel bestimmt. Daher müssen sich die genannten Gesetze auf diese Abstände und Winkel beziehen. Die einfachste Bestimmung eines Winkels besteht aber darin, dass man zwischen seinen Schenkeln ein rechtwinkliges Dreieck annimmt und das Verhältniss zweier Seiten desselben festhält. Dieses führt daher zu folgenden Betrachtungen.

Es sei p (Fig. 1) derjenige Strahl, der auf der Geraden A senkrecht ist. Aus einem beliebigen Punkte a des Strahles a und aus $\mathfrak{a}$ seien auf den Strahl d die Lothe $a\delta$, $\mathfrak{a}\mathfrak{d}_1$ herabgelassen, dann sind einerseits die rechtwinkligen Dreiecke $B\mathfrak{p}\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{a}\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}$, und andererseits die rechtwinkligen Dreiecke $B\mathfrak{a}\mathfrak{d}_1$ und $Ba\delta$ ähnlich, so dass:

$$\frac{B\mathfrak{p}}{B\mathfrak{d}} = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}, \text{ und } \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{d}_1}{B\mathfrak{a}} = \frac{a\delta}{Ba},$$

woraus durch Verbindung folgt:

$$1. \quad B\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{d} = B\mathfrak{a} \cdot B\mathfrak{d} \cdot \frac{a\delta}{Ba}.$$

Durch das Verhältniss $a\delta : Ba$ wird der Winkel zwischen den Strahlen a, d bestimmt, oder gemessen, und zwar ist dieses Verhältniss von der Lage des angenommenen Punktes a unabhängig, d. h., es bleibt unverändert, wo man auch diesen Punkt in dem Strahle a annehmen mag. Ein solches winkelmessendes Verhältniss nennt man gewöhnlich Sinus, so dass, wenn man den genannten Winkel durch (ad) bezeichnet, das in Rede stehende Verhältniss durch $\sin(ad)$ vorgestellt wird. Diese Bezeichnung kann hier beibehalten werden, ohne dass dadurch die Art der Betrachtung (die Methode) aufhört synthetisch zu sein, weil durch dieselbe nur ein gewisses, durch zwei Gerade ($a\delta$, aB) darstellbares, den gedachten Winkel bestimmendes [6] Verhältniss angedeutet wird. Die Gleichung (1) verwandelt sich dadurch in folgende:

$$2. \quad B\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{d} = B\mathfrak{a} \cdot B\mathfrak{d} \cdot \sin(ad)$$

oder:

$$3. \quad \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}{\sin(ad)} = \frac{B\mathfrak{a} \cdot B\mathfrak{d}}{B\mathfrak{p}}.$$

»Dieser Ausdruck (3) zeigt die Beziehung, die zwischen einem Winkel (ad) des Strahlbüschels B

und dem ihm entsprechenden Abschnitt $\mathfrak{a}\mathfrak{d}$ der Geraden A stattfindet.«

Dieselbe Beziehung lässt sich, wie es der Gegensatz erfordert, andererseits auf entsprechende Weise durch

$$4. \quad \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}{\sin(ad)} = \frac{B\mathfrak{p}}{\sin(Aa)\cdot\sin(Ad)}$$

ausdrücken, wovon man sich leicht überzeugen wird*).

4. Da man auf gleiche Weise zwischen jedem Winkel des Strahlbüschels B und dem ihm entsprechenden Abschnitte der Geraden A einen ähnlichen Ausdruck findet wie der eben gefundene (§ 3, 3), so hat man für vier beliebige Elementenpaare, etwa für a, b, c, d und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ nachstehende sechs Ausdrücke:

$$1. \quad \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}{\sin(ad)} = \frac{B\mathfrak{a}\,.\,B\mathfrak{d}}{B\mathfrak{p}}, \qquad 4. \quad \frac{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}{\sin(bc)} = \frac{B\mathfrak{b}\cdot B\mathfrak{c}}{B\mathfrak{p}},$$

$$2. \quad \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{\sin(ac)} = \frac{B\mathfrak{a}\cdot B\mathfrak{c}}{B\mathfrak{p}}, \qquad 5. \quad \frac{\mathfrak{b}\mathfrak{d}}{\sin(bd)} = \frac{B\mathfrak{b}\cdot B\mathfrak{d}}{B\mathfrak{p}},$$

$$3. \quad \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\sin(ab)} = \frac{B\mathfrak{a}\cdot B\mathfrak{b}}{B\mathfrak{p}}, \qquad 6. \quad \frac{\mathfrak{c}\mathfrak{d}}{\sin(cd)} = \frac{B\mathfrak{c}\cdot B\mathfrak{d}}{B\mathfrak{p}}.$$

Vier von diesen Ausdrücken, nämlich (1, 2, 4, 5), lassen sich, wie leicht zu sehen, so verbinden, dass man hat:

[7] $$7. \quad \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}{\sin(ad)} : \frac{\mathfrak{b}\mathfrak{d}}{\sin(bd)} = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{\sin(ac)} : \frac{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}{\sin(bc)}$$

oder:

$$\text{I.} \quad \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}{\mathfrak{b}\mathfrak{d}} : \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} = \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)} : \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)}$$

Dieser Ausdruck ist, wie man sieht, nicht mehr von der Lage der Gebilde B, A abhängig, da in ihm nicht mehr die begrenzten Theile $B\mathfrak{a}$, $B\mathfrak{b}$,..... der Strahlen vorkommen, er gilt demnach sowohl für die schiefe als perspectivische Lage der Gebilde, und folglich enthält er das oben (§ 3) verlangte Gesetz. Nämlich er zeigt:

»Dass bei irgend vier entsprechenden Elementenpaaren a, b, c, d und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ ein gewisses Doppel-

---

*) Diese Beziehung (3, 4) wird sich in der Folge noch öfter als sehr fruchtbar bewähren.

verhältniss $[(\mathfrak{a}\mathfrak{d}:\mathfrak{b}\mathfrak{d}):(\mathfrak{a}\mathfrak{c}:\mathfrak{b}\mathfrak{c})]$, gebildet aus vier Abschnitten der Geraden A, gleich ist dem Doppelverhältniss $[(\sin(ad):\sin(bd)):(\sin(ac):\sin(bc))]$, welches auf entsprechende Weise aus den Sinussen derjenigen Winkel des Strahlbüschels B, die jenen Abschnitten entsprechen, gebildet ist.«

Die Art, wie die Doppelverhältnisse zusammengesetzt sind, ist leicht zu sehen. Nämlich das Doppelverhältniss links ist aus den vier Abständen zweier Punkte $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ von den beiden übrigen $(\mathfrak{c}, \mathfrak{d})$ gebildet, und zwar so, dass das Verhältniss $(\mathfrak{a}\mathfrak{d}:\mathfrak{b}\mathfrak{d})$ der Abstände der zwei ersteren Punkte von einem der letzteren $(\mathfrak{d})$ durch das Verhältniss $(\mathfrak{a}\mathfrak{c}:\mathfrak{b}\mathfrak{c})$ ihrer Abstände von dem anderen $(\mathfrak{c})$, in gleicher Ordnung genommen, gemessen wird. Das Doppelverhältniss rechts ist auf entsprechende Weise zusammengesetzt.

Es ist gleichgültig, welches der beiden Punktenpaare oder Strahlenpaare man als das erste annimmt, denn die Glieder des obigen Ausdrucks (I.) lassen sich, [8] ohne dass dadurch die Gleichung gestört wird, wie folgt umstellen

$$\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}:\frac{\mathfrak{b}\mathfrak{d}}{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}=\frac{\sin(ad)}{\sin(ac)}:\frac{\sin(bd)}{\sin(bc)}$$

wo nun, im Vergleich mit vorhin, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ das erste und $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ das zweite Punktenpaar ist; und wo Aehnliches von den beiden Strahlenpaaren gilt.

Die vier Punkte, so wie die vier Strahlen aber lassen sich auf drei wesentlich verschiedene Arten einander paarweise entgegenstellen, nämlich

α) die Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ den Punkten $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}$; α) die Strahlen a, b den Strahlen c, d;
β) » » $\mathfrak{a}, \mathfrak{c}$ » » $\mathfrak{b}, \mathfrak{d}$; β) » » a, c » » b, d;
γ) » » $\mathfrak{a}, \mathfrak{d}$ » » $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}$. γ) » » a, d » » b, c.

Da man für jede dieser drei Zusammenstellungen auf gleiche Weise einen ähnlichen Ausdruck findet, wie der obige (I.), so hat man statt des letzteren zugleich folgende drei Ausdrücke:

$$\text{II.}\left\{\begin{array}{ll} 8. & \dfrac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}:\dfrac{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}{\mathfrak{b}\mathfrak{d}}=\dfrac{\sin(ac)}{\sin(bc)}:\dfrac{\sin(ad)}{\sin(bd)} \\[2ex] 9. & \dfrac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}\mathfrak{b}}:\dfrac{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}{\mathfrak{c}\mathfrak{d}}=\dfrac{\sin(ab)}{\sin(cb)}:\dfrac{\sin(ad)}{\sin(cd)} \\[2ex] 10. & \dfrac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{d}\mathfrak{b}}:\dfrac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{\mathfrak{d}\mathfrak{c}}=\dfrac{\sin(ab)}{\sin(db)}:\dfrac{\sin(ac)}{\sin(dc)} \end{array}\right.$$

Je zwei Punkte oder Strahlen, die bei einer von diesen drei Zusammenstellungen als ein Paar zusammengefasst werden, sollen fortan »zugeordnete« Punkte oder Strahlen heissen.

In Hinsicht der gegenseitigen Lage der zwei zugeordneten Punktenpaare oder Strahlenpaare, sind zwei merklich verschiedene Fälle zu unterscheiden, nämlich:

a) entweder folgen die Punkte oder Strahlen jedes Paares unmittelbar nacheinander, wie z. B. in den beiden Zusammenordnungen (β) und (γ); oder:

[9]b) die Punkte oder Strahlen der beiden Paare folgen abwechselnd aufeinander, wie z. B. in der Zusammenordnung (α).

Diese Fälle sind immer für die vier Punkte und für die ihnen entsprechenden vier Strahlen übereinstimmend, d. h., befinden sich erstere im Falle (a), so sind es auch letztere, und befinden sich erstere im Falle (b), so sind es auch die letzteren; und auch umgekehrt.

5. Aus dem allgemeinen Gesetze (§ 4) über vier beliebige Elementenpaare der projectivischen Gebilde A, B lassen sich unmittelbar nachstehende Folgerungen ziehen.

Hält man, bei der perspectivischen Lage der Gebilde (Fig. 1), die vier Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ in der Geraden A fest, während man den Mittelpunkt B des Strahlbüschels B sich beliebig in der Ebene herum bewegen lässt, sowohl auf der einen als auf der anderen Seite der Geraden A, so ändern sich zwar die Winkel, welche die vier Strahlen a, d, b, c mit einander einschliessen, in jedem Augenblicke, aber die aus den Sinussen dieser Winkel zusammengesetzten Doppelverhältnisse in den obigen Ausdrücken (§ 4, II) behalten unveränderliche Werthe, nämlich diese Werthe sind stets den Werthen der entsprechenden Doppelverhältnisse (links) gleich, welche aus den Abständen der vier festen Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ von einander zusammengesetzt sind. — Werden umgekehrt die vier Strahlen a, d, b, c des Strahlbüschels B in bestimmter Lage festgehalten, während die Gerade A ihre Lage auf alle mögliche Weise ändert, so ändern sich zwar mit der Lage der Geraden auch zugleich ihre Abschnitte zwischen den jedesmaligen vier Durchschnittspunkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ aber die aus diesen Abschnitten zusammengesetzten Doppelverhältnisse [10] (§ 4, II) behalten stets dieselben Werthe, weil sie nämlich stets den Werthen der entsprechenden Doppelverhältnisse rechts gleich sind. Es folgt daraus der nachstehende Doppelsatz.

»*Bei allen Strahlbüscheln, von welchen vier Strahlen durch die nämlichen vier bestimmten Punkte* ($\mathfrak{a}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$) *einer Geraden A gehen, haben die drei Doppelverhältnisse, die sich aus den Sinussen der von den jedesmaligen vier Strahlen eingeschlossenen Winkel zusammensetzen lassen, einerlei Werthe;*« nämlich diese Werthe sind jedesmal den Werthen der drei Doppelverhältnisse gleich, welche aus den Abständen der vier festen Punkte von einander zusammengesetzt sind.

Bei allen Geraden, welche die nämlichen vier bestimmten Strahlen (a, d, b, c) *eines Strahlbüschels B schneiden, haben die drei Doppelverhältnisse, die sich aus den Abständen der jedesmaligen vier Durchschnittspunkte* ($\mathfrak{a}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$) *von einander zusammensetzen lassen, einerlei Werthe;*« nämlich diese Werthe sind jedesmal den Werthen der drei Doppelverhältnisse gleich, welche aus den Sinussen der von den vier festen Strahlen eingeschlossenen Winkel zusammengesetzt sind.

Den Satz rechts hat ein französischer Mathematiker, *Brianchon*, zuerst bekannt gemacht in einer schätzbaren Abhandlung über die Linien der zweiten Ordnung (*Mémoire sur les lignes du second ordre*, p. 7. *Paris* 1817.).

6. Ferner folgt aus dem obigen Gesetz (§ 4) unmittelbar:

α) »Dass das ganze System der einander entsprechenden Elementenpaare zweier projectivischen Gebilde A, B bestimmt sei, sobald irgend drei Paare gegeben sind, d. h. wenn irgend drei Elementenpaare gegeben sind, so kann mittelst derselben zu jedem gegebenen vierten Element des einen Gebildes das entsprechende Element des anderen Gebildes gefunden werden, und die Gebilde lassen sich dadurch, [11] wenn sie sich in schiefer Lage befinden, in die ursprüngliche oder perspectivische Lage zurückbringen.«

Diese Behauptung mag wie folgt noch näher erörtert werden.

I. Es seien z. B. die drei Elementenpaare $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und a, b, c (Fig. 2) gegeben, so kann daraus zu jedem beliebigen gegebenen vierten Strahl d des Strahlbüschels B der entsprechende Punkt $\mathfrak{d}$ in der Geraden A, oder umgekehrt, zu diesem, wenn er gegeben ist, kann jener gefunden werden. Denn vermöge eines jeden der drei Ausdrücke (§ 4, II), z. B. vermöge des Ausdruckes:

$$\frac{\mathfrak{ac}}{\mathfrak{bc}} : \frac{\mathfrak{ad}}{\mathfrak{bd}} = \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)}$$

ist im ersten Falle der Werth des Verhältnisses $\mathfrak{a}\mathfrak{d} : \mathfrak{b}\mathfrak{d}$, und im anderen Falle der Werth des Verhältnisses $\sin(ad) : \sin(bd)$ durch die jedesmaligen übrigen drei Verhältnisse gegeben.

Nun kann, wenn das Verhältniss $\mathfrak{a}\mathfrak{d} : \mathfrak{b}\mathfrak{d}$ gegeben ist und die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ fest sind, der gesuchte Punkt $\mathfrak{d}$ offenbar nur in zwei Stellen dieser Bedingung genügen, und zwar sind diese in Bezug auf die zwei festen Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ dadurch unterschieden, dass der Punkt $\mathfrak{d}$ das eine Mal zwischen und das andere Mal jenseits derselben liegt. Von diesen zwei Lagen kann aber dem Punkte $\mathfrak{d}$ jedesmal nur eine zukommen, und zwar wird durch die gegenseitige Lage der vier gegebenen Strahlen entschieden, welche von beiden es sei, denn je nachdem die einander zugeordneten Strahlenpaare a und b, c und d nacheinander oder abwechselnd sich folgen, findet auch bei den Punktenpaaren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ Folge oder Abwechselung statt (§ 4), wodurch dann jedesmal entschieden werden [12] kann, welche der zwei genannten Lagen dem Punkte $\mathfrak{d}$ zukomme.

Ebenso kann, wenn der Punkt $\mathfrak{d}$ gegeben und dagegen der Strahl d gesucht wird, der letztere dem gegebenen Verhältnisse $\sin(ad) : \sin(bd)$ nur in zwei verschiedenen Lagen genügen, und durch die gegenseitige Lage der vier gegebenen Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ wird entschieden, in welcher von beiden Lagen allein er dem gegebenen Punkte $\mathfrak{d}$ entsprechen kann.

Späterhin werden sich sehr bequeme Mittel darbieten (§ 24, IV), um das jedesmalige gesuchte Element schnell und sicher zu finden*).

II. Ferner wird die obige Behauptung (α) durch folgende Betrachtung erwiesen, die zugleich Anleitung giebt, die Gebilde A, B aus der schiefen (Fig. 2) in die perspectivische Lage (Fig. 1) zurückzubringen.

Sind nämlich $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ (Fig. 5) die drei gegebenen Punkte in der Geraden A, und betrachtet man von den drei gegebenen

---

*) Sollte über die zwiefache Lage des jedesmaligen gesuchten Elements bloss aus den in Zahlen gegebenen Werthen der Verhältnisse $\mathfrak{a}\mathfrak{d} : \mathfrak{b}\mathfrak{d}$, $\sin(ad) : \sin(bd)$ entschieden werden, ohne Ansicht der Figur, so müsste man bei der Zusammensetzung der Verhältnisse in dem obigen Ausdrucke die Verschiedenheit der Lage der Elemente gegen einander durch die Zeichen $+$ und $-$ bemerklich machen, so würde alsdann das Vorzeichen der Verhältnisse $\mathfrak{a}\mathfrak{d} : \mathfrak{b}\mathfrak{d}$, $\sin(ad) : \sin(bd)$ über das Zweifelhafte der Lage des gesuchten Elements entscheiden.

Strahlen a, b, c vorerst nur zwei, etwa a, b, so ist, wenn diese durch die festen Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ gehen und einen bestimmten Winkel (ab) einschliessen sollen, der Ort des Scheitels B dieses Winkels auf zwei bestimmte gleiche Kreislinien $\mathfrak{a}B\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}B_1\mathfrak{b}$ beschränkt, die beide durch die zwei festen Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ gehen. Ebenso ist, wenn man die zwei Strahlen a, c allein unter der Bedingung betrachtet, dass sie durch die [13] festen Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$ gehen und einen gegebenen Winkel (ac) einschliessen sollen, der Ort des Scheitels B dieses Winkels auf zwei bestimmte gleiche Kreislinien $\mathfrak{a}B\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}B_1\mathfrak{c}$ beschränkt, die durch die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$ gehen. Daher lassen sich die Scheitel der beiden gegebenen Winkel (ab), (ac), wenn ihre Schenkel a, b, c durch die festen Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ gehen sollen, nur in denjenigen beiden Punkten B, B_1 vereinigen, in welchen sich die auf einerlei Seite der Geraden A liegenden Ortskreise einander (ausser in $\mathfrak{a}$) zum zweiten Male schneiden.

Dadurch ist offenbar die Richtigkeit der obigen Behauptung (α) dargethan. Denn befänden sich die beiden Gebilde B, A in beliebiger schiefer Lage, wie etwa in (Fig. 2), so folgt aus dieser Betrachtung, dass sie, sobald drei entsprechende Elementenpaare $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und a, b, c gegeben sind, nicht auf wesentlich verschiedene Arten in perspectivische Lage gedacht werden können, d. h., in solche Lage gedacht werden können, wo die drei gegebenen Strahlen durch die ihnen entsprechenden drei Punkte gehen. Nämlich wird z. B. die Lage der Geraden A als fest angenommen, etwa in (Fig. 5), so kann wohl der Strahlbüschel auf beiden Seiten derselben entweder in die Lage von B oder in die Lage von B_1 gebracht werden, aber offenbar wird in beiden Fällen jeder beliebig vierte Strahl d des Strahlbüschels mit dem nämlichen Punkte $\mathfrak{d}$ der Geraden A zusammentreffen. Oder wird der Strahlbüschel B in irgend einer Lage als fest angenommen, etwa in (Fig. 6), so kann wohl die Gerade entweder in die Lage von A oder in die Lage von A_1 gebracht werden, und zwar so, dass A und A_1 parallel sind, und wo der Mittelpunkt B des Strahlbüschels in der Mitte zwischen ihnen liegt, aber offenbar wird in beiden Fällen jeder [14] beliebige vierte Punkt $\mathfrak{d}$ der Geraden mit dem nämlichen Strahl d des Strahlbüschels B zusammentreffen.

Aus der vorstehenden Betrachtung, so wie auch aus der obigen (I.), folgt ferner zugleich:

$\beta)$ »Dass man bei zwei beliebig liegenden Gebilden B, A ganz nach Willkür drei Paar Elemente

a und $\mathfrak{a}$, b und $\mathfrak{b}$, c und $\mathfrak{c}$ auswählen und sodann festsetzen könne, die Gebilde sollen projectivisch und diese Elementenpaare sollen entsprechende Elementenpaare sein.«

Endlich folgt noch, durch Umkehrung, der nachstehende Satz:

γ) »Sind die Elemente $a, b, c, d, \ldots\ldots$ und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \ldots\ldots$ zweier Gebilde B und A der Reihe nach solcher Gestalt gepaart, dass je vier Elementenpaare dem obigen Gesetze (§ 4, II) genügen, wobei nothwendiger Weise die jedesmaligen vier Elemente des einen Gebildes mit denen des anderen Gebildes übereinstimmende gegenseitige Lage haben müssen, so sind die Gebilde, in Beziehung auf alle jene Elementenpaare, projectivisch.«

7. In Ansehung der obigen Ausdrücke (§ 4, II), die das Gesetz darstellen, welchem bei zwei projectivischen Gebilden A, B im Allgemeinen je vier entsprechende Elementenpaare $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ und a, b, c, d unterworfen sind, können verschiedene besondere Fälle eintreten, die nämlich von eigenthümlicher Lage der jedesmaligen vier Elemente herrühren, von denen einige interessant genug sind, um hier näher erörtert zu werden.

Es können nämlich erstens solche Fälle eintreten, wo die in den genannten Ausdrücken enthaltenen Doppelverhältnisse vereinfacht werden, und zwar [15] dadurch, dass in einem solchen Doppelverhältniss zwei Glieder gleich werden und gegen einander gehoben werden können, oder dass das Doppelverhältniss, (wenn es sich auf die vier Strahlen a, b, c, d bezieht), auf sonstige Art auf ein einfaches Verhältniss gebracht wird. Dahin gehören z. B. folgende Fälle:

Wenn von den vier Punkten in der Geraden A entweder a) einer in der Mitte zwischen zweien anderen liegt, oder b) wenn einer der unendlich entfernte Punkt der Geraden ist.

Wenn von den vier Strahlen des Strahlbüschels B entweder α) einer mit zwei anderen gleiche Winkel einschliesst, oder β) wenn zwei Strahlen zu einander rechtwinklig sind.

I. Denn wenn a) etwa der Punkt $\mathfrak{d}$ (Fig. 1) in der Mitte zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ liegt, so ist das Verhältniss $\mathfrak{a}\mathfrak{d} : \mathfrak{b}\mathfrak{d} = 1$, und daher vereinfacht sich in diesem Fall in dem obigen Ausdrucke (§ 4, II, 8) das Doppelverhältniss links wie folgt:

$$1.\quad \mathfrak{a}\mathfrak{c} : \mathfrak{b}\mathfrak{c} = \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)}.$$

Wenn ferner *b*) unter den vier Punkten sich der unendlich entfernte Punkt $\mathfrak{q}$ (§ 2) der Geraden A befindet, wenn etwa die vier Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{q}$ gegeben sind, dann sind offenbar die Abstände des letzteren von den drei übrigen, nämlich $\mathfrak{aq}$, $\mathfrak{bq}$, $\mathfrak{cq}$, als einander gleich zu achten, da sie sämmtlich unendlich gross, und nur durch die Abschnitte $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{ac}$, $\mathfrak{bc}$ von einander unterschieden sind, so dass also jedes der drei Verhältnisse $\mathfrak{aq} : \mathfrak{bq}$, $\mathfrak{aq} : \mathfrak{cq}$, $\mathfrak{bq} : \mathfrak{cq}$ schlechthin $= 1$ ist, und dass folglich in diesem Falle die genannten Doppelverhältnisse (§ 4, II), wenn man darin $\mathfrak{q}$ an die Stelle von $\mathfrak{d}$ setzt, sich wie folgt vereinfachen:

$$[\mathbf{16}]\quad 2.\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{ac} : \mathfrak{bc} &= \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \frac{\sin(aq)}{\sin(bq)}, \\ \mathfrak{ab} : \mathfrak{cb} &= \frac{\sin(ab)}{\sin(cb)} : \frac{\sin(aq)}{\sin(cq)}, \\ \mathfrak{ab} : \mathfrak{ac} &= \frac{\sin(ab)}{\sin(qb)} : \frac{\sin(ac)}{\sin(qc)}. \end{aligned}\right.$$

Durch jeden dieser letzteren drei Ausdrücke wird, wie man sieht, der Parallelstrahl q bestimmt, sobald irgend drei entsprechende Elementenpaare $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und a, b, c gegeben sind.

Wenn andererseits *α*) etwa der Strahl d in der Mitte zwischen a und b liegt, so ist das Verhältniss $\sin(ad) : \sin(bd) = 1$, und daher hat man für den Fall, wo c und d zugeordnete Strahlen sind (§ 4, 8):

$$3.\quad \frac{\mathfrak{ac}}{\mathfrak{bc}} : \frac{\mathfrak{ad}}{\mathfrak{bd}} = \sin(ac) : \sin(bc).$$

Wenn ferner *β*) zwei Strahlen, etwa a und b, zu einander senkrecht sind, so ist $\sin(bc) = \cos(ac)$, und $\sin(bd) = \cos(ad)$, oder $\sin(ac) = \cos(bc)$, und $\sin(ad) = \cos(bd)$, und daher hat man, wenn a und b als zugeordnet angenommen werden (§ 4, 8):

$$4.\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\mathfrak{ac}}{\mathfrak{bc}} : \frac{\mathfrak{ad}}{\mathfrak{bd}} &= \operatorname{tg}(ac) : \operatorname{tg}(ad), \text{ oder} \\ \frac{\mathfrak{ac}}{\mathfrak{bc}} : \frac{\mathfrak{ad}}{\mathfrak{bd}} &= \operatorname{tg}(bd) : \operatorname{tg}(bc). \end{aligned}\right.$$

II. Die vorstehenden Fälle geben, wie man bemerken wird, ein bequemes Mittel an die Hand, um den Werth eines gegebenen Doppelverhältnisses, sei dasselbe von vier Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ oder von vier Strahlen a, b, c, d abhängig, durch ein einfaches Verhältniss darzustellen; oder auch umgekehrt, um beliebige Systeme von vier Punkten oder von vier Strahlen zu finden, denen ein Doppelverhältniss zukommt, dessen Werth durch ein einfaches Verhältniss gegeben ist.

[**17**] Denn soll z. B. der Werth eines von den vier Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, oder von den vier Strahlen a, b, c, d (Fig. 3) abhängigen Doppelverhältnisses durch ein einfaches Verhältniss dargestellt werden, so kann dies, zufolge des Doppelsatzes in (§ 5), wie folgt geschehen. Da nämlich einerseits die genannten vier Strahlen alle Geraden unter einerlei Doppelverhältniss schneiden, so ist also nur nöthig eine Gerade A_1 so zu ziehen, dass sie entweder:

a) die vier Strahlen so schneidet, dass von den vier Durchschnittspunkten irgend einer in der Mitte zwischen zwei andern liegt (I, a.); dieser Bedingung kann die Gerade A_1 offenbar in 12 verschiedenen Richtungen genügen, weil nämlich der Durchschnitt jedes Strahls in der Mitte zwischen je zwei der drei übrigen Durchschnitte liegen kann, mithin giebt es 12 Systeme von parallelen Geraden, welche alle jene Bedingung erfüllen; oder

b) mit irgend einem der vier Strahlen parallel ist (I, b); dieser Bedingung kann also die Gerade A_1 in vier verschiedenen Richtungen genügen, oder es giebt vier Systeme von parallelen Geraden, welche alle diese Bedingung erfüllen; z. B. es sei die Gerade A_1 etwa mit dem Strahle c parallel, so werden also die Verhältnisse

$$\mathfrak{b}_1\mathfrak{d}_1 : \mathfrak{a}_1\mathfrak{d}_1; \quad \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 : \mathfrak{a}_1\mathfrak{d}_1; \quad \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 : \mathfrak{d}_1\mathfrak{b}_1,$$

nach der Reihe, mit den Doppelverhältnissen in den obigen Ausdrücken (§ 4, II.) gleiche Werthe haben.

Und da andererseits jeden vier Strahlen eines Strahlbüschels, welche durch die vier festen Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ gehen, Doppelverhältnisse von einerlei Werth zugehören, so ist, um der obigen Forderung zu genügen, nur nöthig den Mittelpunkt eines Strahlbüschels B_1 so anzunehmen, dass entweder:

[**18**] α) von den vier Strahlen a_1, b_1, c_1, d_1, welche durch jene festen Punkte gehen, irgend einer in der Mitte zwischen

zwei anderen liegt (I, α); unter dieser Bedingung ist der Ort des Mittelpunktes B_1, im Ganzen, auf 12 bestimmte Kreise beschränkt, deren Mittelpunkte sämmtlich in der festen Geraden A liegen, was nachher (§ 8, III) bewiesen wird; oder

β) dass von den vier Strahlen a_1, b_1, c_1, d_1 irgend zwei zu einander senkrecht sind (I, β); vermöge dieser Bedingung ist der Ort des Mittelpunkts B_1 offenbar auf diejenigen 6 Kreise beschränkt, welche die Abstände der vier festen Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ von einander, also die Strecken $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{ac}$, $\mathfrak{ad}$, $\mathfrak{bc}$, $\mathfrak{bd}$ und $\mathfrak{cd}$, zu Durchmessern haben.

Harmonische Elemente.

8. Es kann **zweitens** der besondere Fall eintreten, wo in den vorhin erwähnten Ausdrücken (§ 7) der Werth eines Doppelverhältnisses $= 1$ wird.

I. Von den drei Ausdrücken (§ 4, II) gestattet jedesmal nur einer die Annahme, dass der Werth der darin enthaltenen Doppelverhältnisse $= 1$ werden könne, z. B. wenn sie sich auf (Fig. 1) beziehen, so gestattet nur der Ausdruck (§ 4, 8), in welchem die abwechselnden Punkte, so wie die abwechselnden Strahlen einander zugeordnet sind (§ 4, b), diese Annahme; dass die beiden übrigen Ausdrücke diese Annahme nicht erlauben, fällt beim blossen Anblick der Figur in die Augen. Wird in der That bei jenem ersteren Ausdrucke eines der beiden Doppelverhältnisse $= 1$ angenommen, so ist nothwendiger Weise auch das andere $= 1$, so dass man hat:

$$1.\quad \frac{\mathfrak{ac}}{\mathfrak{bc}} : \frac{\mathfrak{ad}}{\mathfrak{bd}} = \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)} = 1,$$

und daher zugleich:

$$[19]\quad 2.\quad \frac{\mathfrak{ac}}{\mathfrak{bc}} = \frac{\mathfrak{ad}}{\mathfrak{bd}}, \qquad 2.\quad \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} = \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)}, \text{ oder}$$

$$3.\quad \frac{\mathfrak{ca}}{\mathfrak{da}} = \frac{\mathfrak{cb}}{\mathfrak{db}}, \qquad 3.\quad \frac{\sin(ca)}{\sin(da)} = \frac{\sin(cb)}{\sin(db)},$$

woraus man sieht, wie die gegenseitige Lage der beiderseitigen vier Elemente in diesem Falle beschaffen ist, nämlich:

»In diesem Falle liegen die vier Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ so, dass die Abstände zweier zugeordneten ($\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{c}$) von den zwei anderen gleiches Verhältniss zu einander haben (proportional sind), d. h , dass das Verhältniss der Abstände eines Punktes von zwei zugeordneten Punkten, gleich ist dem in ähnlicher Beziehung genommenen Verhältniss der Abstände des ihm zugeordneten (vierten) Punktes von jenen zwei Punkten.«

»In diesem Falle liegen die vier Strahlen a, d, b, c so, dass die Sinusse der Winkel, welche zwei zugeordnete (a, b oder d, c) mit den zwei anderen einschliessen, gleiches Verhältniss zu einander haben, d. h., dass das Verhältniss der Sinusse der Winkel, welche ein Strahl mit zwei zugeordneten Strahlen einschliesst, gleich ist dem in ähnlicher Beziehung genommenen Verhältniss der Sinusse der Winkel, welche der vierte Strahl mit jenen zweien einschliesst.«

Unter diesen Bedingungen heissen die vier Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ »vier harmonische Punkte«, und die vier Strahlen a, d, b, c »vier harmonische Strahlen«.*) Ferner sollen in diesem Falle je zwei zugeordnete Punkte ($\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$) oder Strahlen (a und b, c und d) fortan »zugeordnete harmonische Punkte oder Strahlen« genannt werden.

Dass die neben einander stehenden Gleichungen (2) zugleich statt finden, kann hiernach mit Worten wie folgt ausgesprochen werden:

α) »Wenn bei zwei projectivischen [20] Gebilden A, B irgend vier Elemente des einen Gebildes harmonisch sind, so sind auch die ihnen entsprechenden vier Elemente des anderen Gebildes harmonisch.«

Dieser Satz lässt nicht nur eine einfache Umkehrung zu, sondern es findet in dieser Hinsicht folgendes statt. Da nämlich die Lage von vier harmonischen Elementen so beschaffen ist, dass durch je drei derselben, wofern angegeben ist, welche zwei davon einander zugeordnet sein sollen, offenbar das vierte unzweideutig bestimmt ist, z. B. wenn $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ oder a, b, c gegeben, und zwar $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, oder a und b einander zugeordnet sind, so ist $\mathfrak{d}$ oder d genau bestimmt (§ 6, I); und da ferner die projectivische Beziehung zweier Gebilde A, B durch irgend drei entsprechende Elementenpaare, die nach Willkür angenommen werden dürfen, bestimmt ist (§ 6, β): so werden also die Gebilde A, B in Ansehung der beiderseitigen harmonischen Elemente $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und a, d, b, c, nicht

*) *Lahire* nennt in seinem *Traité des sections coniques* vier solche Strahlen »*harmonicales*«, und *Brianchon* nennt sie in seiner oben erwähnten Schrift »*faisceau harmonique*«.

nur auf eine Art, wenn etwa die gleichnamigen Elemente einander entsprechen, projectivisch sein können, sondern vielmehr in allen Fällen, wo irgend zwei zugeordnete harmonische Elemente des einen Gebildes irgend zwei zugeordneten harmonischen Elementen des anderen Gebildes entsprechend angenommen werden, also in 8 Fällen, weil nämlich unter dieser Bedingung die vier Strahlen den vier Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ in folgenden 8 verschiedenen Rangordnungen entsprechen können:

$$\begin{array}{cccc} adbc & bdac & dacb & cadb \\ acbd & bcad & dbca & cbda \end{array}$$

Demnach hat man den nachstehenden Satz:

β) »Sind in jedem von zwei Gebilden A, B irgend vier harmonische Elemente gegeben, und man lässt diese Elemente, nach irgend einer Ordnung genommen, einander paarweise [21] entsprechen, jedoch so, dass irgend zwei zugeordneten harmonischen Elementen des einen Gebildes auch zwei zugeordnete harmonische Elemente des anderen Gebildes entsprechen, welches auf acht verschiedene Arten stattfinden kann, so sind die Gebilde, in Ansehung der jedesmaligen vier Elementenpaare, projectivisch.«

II. Statt der obigen allgemeinen Sätze in (§ 5), hat man im gegenwärtigen Falle, wo die jedesmaligen vier Elemente harmonisch sind, folgende Sätze (I, *α*):

»*Jede vier Strahlen, die von irgend einem Mittelpunkt aus durch vier feste harmonische Punkte* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ *gehen, sind harmonisch.*«
Oder:
»*Vier harmonische Punkte bestimmen mit jedem anderen Punkte vier harmonische Strahlen.*«*)

»*Jede vier Punkte, in welchen irgend eine Gerade von vier festen harmonischen Strahlen* a, d, b, c *geschnitten wird, sind harmonisch.*«
Oder:
»*Vier harmonische Strahlen schneiden jede Gerade in vier harmonischen Punkten.*«*)

III. In Betracht der gegenseitigen Lage, welche vier harmonische Elemente unter sich haben können, finden folgende Umstände statt.

Wenn vier harmonische Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, von denen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ einander zugeordnet sind, nach der Ordnung,

*) Das Wesentliche der obigen Sätze hat *Lazare Carnot* in seinem *Essai sur la théorie des transversales* zuerst gegeben. Einen Theil davon haben schon die Griechen gekannt (*Pappus*, Collec. Mathem. libr. VII. Propos. CXLV.)

wie (Fig. 3) sie vorstellt, auf einander folgen, muss nothwendig $\mathfrak{d}$ näher bei $\mathfrak{b}$ als bei $\mathfrak{a}$ liegen (I, 2), weil dies offenbar für $\mathfrak{c}$ der Fall ist; und umgekehrt, wenn $\mathfrak{d}$ näher bei $\mathfrak{b}$ als bei $\mathfrak{a}$ ist, so muss $\mathfrak{c}$ nothwendig allemal jenseits $\mathfrak{b}$ liegen; oder wäre $\mathfrak{d}$ näher bei $\mathfrak{a}$ als bei $\mathfrak{b}$, so müsste nothwendiger Weise $\mathfrak{c}$ [22] diesseits $\mathfrak{a}$ liegen. Ebenso ist für die gegenwärtige Aufeinanderfolge der Punkte erforderlich, dass $\mathfrak{b}$ näher bei $\mathfrak{d}$ als bei $\mathfrak{c}$ liegt. Da das Verhältniss $\mathfrak{a}\mathfrak{c} : \mathfrak{b}\mathfrak{c}$ gleich $(\mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{b}\mathfrak{c}) : \mathfrak{b}\mathfrak{c} = 1 + \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}$, so sieht man, dass, wenn man die zugeordneten harmonischen Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ festhält, während man in Gedanken $\mathfrak{c}$ von $\mathfrak{b}$ fortrücken lässt, der Werth dieses Verhaltnisses alsdann immermehr der 1 sich nähert, je weiter $\mathfrak{c}$ sich von $\mathfrak{b}$ entfernt, und dass daher $\mathfrak{d}$ sich gleichzeitig immermehr der Mitte $\mathfrak{m}$ des festen Abstandes $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ nähert, weil das Verhältniss $\mathfrak{a}\mathfrak{d} : \mathfrak{b}\mathfrak{d}$ stets jenem Verhältniss gleich sein muss. Lässt man endlich den unendlich entfernten Punkt $\mathfrak{q}$ der Geraden A an die Stelle von $\mathfrak{c}$ treten, so wird das genannte Verhältniss $1 + \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{b}\mathfrak{q}}$, da $\mathfrak{b}\mathfrak{q}$ unendlich gross ist, schlechthin $= 1$, und dann muss nothwendiger Weise $\mathfrak{d}$ sich in der genannten Mitte $\mathfrak{m}$ befinden. Denkt man sich ferner die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ fest, und lässt jetzt $\mathfrak{c}$ je mehr und mehr dem $\mathfrak{b}$ sich nähern, so nähert sich offenbar auch $\mathfrak{d}$ dem $\mathfrak{b}$, und wenn endlich $\mathfrak{c}$ sich mit $\mathfrak{b}$ vereinigt, so vereinigt sich zugleich $\mathfrak{d}$ mit ihnen beiden. Gleicherweise können sich $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ immermehr dem anderen festen Punkte $\mathfrak{a}$ nähern, bis sie sich endlich gleichzeitig mit ihm vereinigen.

Andererseits folgt, dass, wenn der Strahl d mit den zugeordneten harmonischen Strahlen a, b gleiche Winkel einschliesst, so dass das Verhältniss $\sin(ad) : \sin(bd) = 1$, dann auch $\sin(ac) : \sin(bc) = 1$ ist (I, 2), und daher auch c mit a und b gleiche Winkel einschliessen muss, und dass dann folglich d und c in diesem Falle zu einander rechtwinklig sind (weil sie die Winkel zwischen a und b hälften). Ferner folgt hier ähnlicherweise, wie vorhin bei den vier harmonischen [23] Punkten, dass, wenn a und b fest sind, während c sich dem b nähert, bis er endlich mit ihm zusammenfällt, dann gleichzeitig auch d sich mit ihnen beiden vereinigt; und dass eben so c und d sich gleichzeitig mit dem anderen festen Strahle a vereinigen können.

Aus dieser Betrachtung fliessen folgende Sätze:

α) »*Zu irgend zwei festen Punkten* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ *einer Geraden* A *giebt es unzählige Paare zugeordneter harmonischer Punkte* $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{c}$, *und namentlich ist der in der Mitte zwischen* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *liegende Punkt* $\mathfrak{m}$ *und der unendlich entfernte Punkt* $\mathfrak{q}$ *der Geraden* A *ein solches Paar; und ferner ist in jedem der beiden Punkte* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ *selbst ein solches Paar vereinigt.*«

β) »*Zu irgend einem festen Punkt* $\mathfrak{m}$ *einer Geraden* A *und zu dem unendlich entfernten Punkt* $\mathfrak{q}$ *derselben giebt es unzählige zugeordnete harmonische Punktenpaare, wie etwa* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, *und zwar sind je zwei solche Punkte gleich weit von jenem festen Punkte* $\mathfrak{m}$ *entfernt, und umgekehrt, je zwei Punkte, welche gleich weit von jenem festen Punkte entfernt sind, sind ein solches Paar.*«

γ) »*Liegt von vier harmonischen Punkten einer in der Mitte zwischen zwei einander zugeordneten, so ist sein zugeordneter unendlich entfernt, und* [24] *umgekehrt: ist von den vier Punkten einer unendlich entfernt, so liegt sein zugeordneter in der Mitte zwischen den zwei übrigen Punkten.*«

α) »*Zu irgend zwei festen Strahlen* a, b *eines Strahlbüschels* B *giebt es unzählige Paare zugeordneter harmonischer Strahlen* d, c, *und namentlich sind die zwei Strahlen, welche die von jenen Strahlen eingeschlossenen Winkel hälften, mithin zu einander senkrecht sind, ein solches Paar; und ferner ist mit jedem der Strahlen* a, b *ein solches Paar vereinigt.*«

β) »*Zu irgend zwei zu einander senkrechten und festen Strahlen, etwa* c, d, *eines ebenen Strahlbüschels* B *giebt es unzählige zugeordnete harmonische Strahlenpaare, wie etwa* a, b, *und zwar sind je zwei solche Strahlen gleich weit von jedem der zwei festen Strahlen entfernt, und umgekehrt, je zwei Strahlen, deren Winkel von jenen zwei festen Strahlen gehälftet werden, sind ein solches Paar.*«

γ) »*Schliesst von vier harmonischen Strahlen einer mit zwei einander zugeordneten gleiche Winkel ein, so thut sein zugeordneter ein Gleiches, und* [24] *umgekehrt: sind zwei zugeordnete Strahlen zu einander senkrecht, so hälften sie die von den beiden anderen Strahlen eingeschlossenen Winkel.*«

Die letzten Sätze (γ), welche eigentlich schon in (α) und (β) enthalten sind, sind deshalb nochmals deutlicher ausgesprochen worden, weil sie sich auf die einfachsten Fälle von vier harmonischen Elementen beziehen; Fälle, die öfter vorkommen und unter gewissen Umständen, wie leicht zu erachten, Bequemlichkeit und Vortheile gewähren. Solche einfache Fälle lassen sich, wenn beliebige vier harmonische Elemente gegeben sind, zufolge der obigen Sätze (II), wie folgt, darstellen (vergl. § 7, II). Sind irgend vier feste harmonische Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ gegeben, und sollen vier Strahlen a_1, d_1, b_1, c_1, eines Strahlbüschels B_1 durch dieselben gelegt werden, welche sich in dem genannten einfachen Falle befinden, d. h., von welchen zwei zugeordnete zu einander senkrecht sind, oder was auf dasselbe hinausläuft (γ), von denen einer mit zwei zugeordneten gleiche Winkel einschliesst, so ist unter diesen Bedingungen offenbar der Ort des Mittelpunkts B_1 des Strahlbüschels auf zwei bestimmte Kreise beschränkt, deren Durchmesser die Abstände $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ der zugeordneten festen harmonischen Punkte sind, und zwar ist der Mittelpunkt B_1 auf den ersten oder auf den letzten Kreis beschränkt, je nachdem die Strahlen a_1 und b_1, oder c_1 und d_1 zu einander senkrecht sind, oder mit den jedesmaligen anderen Strahlen gleiche Winkel einschliessen. — Sind andererseits irgend vier feste harmonische Strahlen a, d, b, c gegeben, und soll man sie durch eine Gerade A_1 in vier Punkten schneiden, welche den genannten einfachen Fall darstellen, [25] so kann die Gerade A_1 dieser Bedingung offenbar in vier verschiedenen Richtungen genügen, denn ist sie mit einem der vier festen Strahlen parallel, also einer ihrer Durchschnitte unendlich entfernt, so liegt dessen zugeordneter in der Mitte zwischen den zwei übrigen; und umgekehrt, liegt ein Durchschnitt in der Mitte zwischen zwei einander zugeordneten, so ist sein zugeordneter unendlich entfernt (γ) und mithin die Gerade A_1 dem entsprechenden Strahle parallel. Aus dieser Betrachtung zieht man folgende Sätze:

δ) »*Wenn durch beliebige vier feste harmonische Punkte* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ *vier solche Strahlen eines Strahlbüschels* B_1 *gehen sollen, von denen das eine Paar zugeordnete die von dem anderen Paar eingeschlossenen Winkel hälften* (γ), *so ist der Ort des Mittelpunktes* B_1 *des Strahlbüschels auf zwei bestimmte Kreise beschränkt, welche die Abstände* $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ *der sich zugeordneten festen Punkte von einander zu Durchmessern haben.*«*)

δ) »*Wenn von beliebigen vier festen harmonischen Strahlen* a, d, b, c, *eine Gerade* A_1 *in vier solchen Punkten geschnitten werden soll, dass von zwei zugeordneten Punkten der eine unendlich entfernt und der andere in der Mitte zwischen den zwei übrigen Punkten liegt, so muss die Gerade* A_1 *mit irgend einem der vier festen Strahlen parallel sein, und umgekehrt, ist sie mit einem der letzteren parallel, so finden allemal jene Bedingungen statt.*«

Durch den letzteren Satz links ist die Richtigkeit der obigen Behauptung (§ 7, II, α) dargethan.

---

*) Aus diesem Satze lassen sich unmittelbar noch eine Reihe anderer Sätze herleiten, als z. B. nachfolgende:

»Wenn die Endpunkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ der Grundlinie eines Dreiecks $\mathfrak{a}B\mathfrak{b}$ (Fig. 4) fest sind, und wenn die Gerade d oder c, welche den Winkel an der Spitze oder dessen Neben-

[26] Wenn man also durch die Spitze eines beliebigen Dreiecks zwei Strahlen zieht, wovon der eine durch die Mitte der Grundlinie geht, und der andere mit der Grundlinie parallel ist, so sind dieselben zugeordnete harmonische Strahlen zu den zwei (anderen) Seiten des Dreiecks.

---

winkel hälftet, stets durch einen dritten festen Punkt $\mathfrak{d}$ oder $\mathfrak{c}$ der Grundlinie geht, so ist der Ort der Spitze B des Dreiecks ein bestimmter Kreis, welcher den Abstand $\mathfrak{dc}$ des dritten festen Punktes $\mathfrak{d}$ oder $\mathfrak{c}$ von demjenigen Punkte $\mathfrak{c}$ oder $\mathfrak{d}$, der in Bezug auf die zwei genannten Endpunkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, sein zugeordneter harmonischer Punkt ist, zum Durchmesser hat.«

In diesem Falle, wo die Strahlen d, c die von den Strahlen a, b eingeschlossenen Winkel hälften, hat man bekanntlich:

$$B\mathfrak{a} : B\mathfrak{b} = \mathfrak{ad} : \mathfrak{bd} = \mathfrak{ac} : \mathfrak{bc},$$

und umgekehrt, wenn diese Verhältnisse gleich sind, so findet jene Voraussetzung statt. Daher folgt ferner der nachstehende bekannte Satz.

»Wenn die Endpunkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ der Grundlinie eines Dreiecks $\mathfrak{a}B\mathfrak{b}$ fest sind, und wenn das Verhältniss $B\mathfrak{a} : B\mathfrak{b}$ der beiden übrigen Seiten gegeben ist, so ist der Ort der Spitze B des Dreiecks ein Kreis, dessen Mittelpunkt in der genannten Grundlinie liegt, und zwar sind die Endpunkte dieser Grundlinie zu den Endpunkten ($\mathfrak{d}$, $\mathfrak{c}$) des in ihr liegenden Durchmessers des Kreises zugeordnete harmonische Punkte; und ferner: die zwei Geraden (d, c), welche die Winkel an der Spitze des Dreiecks hälften, gehen stets durch zwei feste Punkte, nämlich durch die Endpunkte ($\mathfrak{d}$, $\mathfrak{c}$) des genannten Durchmessers.« Und umgekehrt:

»Nimmt man in einem Durchmesser $\mathfrak{cd}$ eines Kreises irgend zwei Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, die in Bezug auf dessen Endpunkte $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, zugeordnete harmonische Punkte sind, so haben je zwei Gerade $\mathfrak{a}B$, $\mathfrak{b}B$, welche dieselben mit irgend einem Punkte B des Kreises verbinden, einerlei Verhältniss, und zwar verhalten sie sich allemal wie die Abstände der angenommenen Punkte von dem einen oder dem anderen Endpunkte des Durchmessers, also wie $\mathfrak{ad} : \mathfrak{bd}$, oder wie $\mathfrak{ac} : \mathfrak{bc}$; und ferner: die zwei Geraden $B\mathfrak{d}$, $B\mathfrak{c}$, welche den jedesmaligen Punkt B im Kreise mit den Endpunkten des genannten Durchmessers verbinden, hälften die von jenen ersten zwei Geraden eingeschlossenen Winkel.«

Es liessen sich hier leicht noch mancherlei Folgerungen über harmonische Punkte und harmonische Gerade in Beziehung auf den Kreis anschliessen, allein da sich dieselben Eigenschaften in der Folge für alle Kegelschnitte zugleich beweisen lassen, so ist es zweckmässig, sie bis dahin zu verschieben.

IV. Das gemeinschaftliche Gesetz, dem alle Punktenpaare $(\mathfrak{d}, \mathfrak{c})$ oder Strahlenpaare (d, c) unterworfen sind, welche in Bezug auf zwei feste Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ oder Strahlen a, b (Fig. 1) zugeordnete harmonische Punkte oder Strahlen sind, lässt sich folgendermaassen genauer bestimmen.

Aus den obigen Ausdrücken (I, 2):

$$\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}{\mathfrak{b}\mathfrak{d}} = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}; \quad \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)} = \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)},$$

durch welche die harmonische Lage der jedesmaligen vier Elemente bedingt wird, folgt unmittelbar, wenn nämlich der Punkt $\mathfrak{m}$ in der Mitte zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ und der Strahl h in der Mitte zwischen a und b liegt:

[27] $$\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{m} + \mathfrak{m}\mathfrak{d}}{\mathfrak{b}\mathfrak{m} - \mathfrak{m}\mathfrak{d}} = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{m} + \mathfrak{m}\mathfrak{c}}{\mathfrak{m}\mathfrak{c} - \mathfrak{b}\mathfrak{m}}; \quad \frac{\sin(ah + hd)}{\sin(bh - hd)} = \frac{\sin(ah + hc)}{\sin(ch - bh)},$$

und daraus folgt ferner durch bekannte Veränderungen:

$$\mathfrak{m}\mathfrak{d} \cdot \mathfrak{m}\mathfrak{c} = \mathfrak{m}\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{m}\mathfrak{b}^2; \quad \operatorname{tg}(hd) \cdot \operatorname{tg}(hc) = \operatorname{tg}(ah)^2 = \operatorname{tg}(bh)^2,$$

das heisst:

»*Bei irgend vier harmonischen Punkten* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ *ist das Rechteck* $(\mathfrak{m}\mathfrak{d} \cdot \mathfrak{m}\mathfrak{c})$ *unter den Abständen zweier zugeordneten Punkte* $(\mathfrak{d}, \mathfrak{c})$ *von demjenigen Punkte* $(\mathfrak{m})$, *welcher in der Mitte zwischen den zwei übrigen Punkten* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ *liegt, gleich dem Quadrat des halben Abstandes* $(\mathfrak{m}\mathfrak{a}, \mathfrak{m}\mathfrak{b})$ *der letzteren Punkte von einander.*«

»*Bei vier harmonischen Strahlen* a, d, b, c *ist das Produkt* $(\operatorname{tg}(hd) \cdot \operatorname{tg}(hc))$ *der Tangenten der Winkel, welche zwei zugeordnete Strahlen* (d, c) *mit dem Strahle* (h) *einschliessen, der in der Mitte zwischen den zwei übrigen Strahlen* (a, b) *liegt, gleich der zweiten Potenz der Tangente des halben Winkels* $[(ha), (hb)]$, *welchen die letzten Strahlen einschliessen.*«

[28] Oder:

»*Für alle Punktenpaare, die in Bezug auf zwei feste Punkte* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ *zugeordnete harmonische Punkte sind, ist* 1) *das Rechteck unter ihren Abständen von demjenigen Punkte* $\mathfrak{m}$, *welcher in der Mitte zwischen den festen Punkten liegt, von beständiger Grösse, und zwar gleich dem Quadrat des halben Abstandes der festen Punkte von einander; und* 2) *je zwei solche Punkte liegen jedesmal auf einerlei Seite des genannten Punktes* $\mathfrak{m}$; *und umgekehrt: jede zwei Punkte,*

»*Für alle Strahlenpaare, die in Bezug auf zwei feste Strahlen* (a, b) *zugeordnete harmonische Strahlen sind, ist* 1) *das Produkt der Tangenten der Winkel, die sie mit dem Strahle* h *einschliessen, der in der Mitte zwischen den festen Strahlen liegt, von beständiger Grösse, und zwar gleich der zweiten Potenz der Tangente des halben Winkels, welchen die festen Strahlen einschliessen; und* 2) *beide Strahlen liegen jedesmal auf einerlei Seite des genannten Strahles* h: *und um-*

welche diesen beiden Bedingungen zugleich genügen, sind zugeordnete harmonische Punkte in Bezug auf die genannten zwei festen Punkte.«

gekehrt: je zwei Strahlen, welche diesen beiden Bedingungen zugleich genügen, sind zugeordnete harmonische Strahlen in Bezug auf die genannten zwei festen Strahlen.«

Zwei und mehrere Gerade, und zwei und mehrere ebene Strahlbüschel.

9. Der Gegenstand der bisherigen Betrachtung betraf bloss die zwei Gebilde B, A, nämlich einen ebenen Strahlbüschel B und eine Gerade A, die sich in solcher Beziehung entgegengesetzt waren, dass ihre Elemente einander auf bestimmte Weise entsprachen, und dadurch einem bestimmten Gesetze unterworfen waren, und wobei die Gebilde projectivisch genannt wurden. Die weitere Betrachtung wird sich nun auf die Untersuchung der gegenseitigen Beziehung ausdehnen, welche einerseits zwischen zwei Geraden, die mit demselben Strahlbüschel projectivisch sind, und [29] andererseits zwischen zwei Strahlbüscheln, die mit derselben Geraden projectivisch sind, und welche ferner zwischen mehreren Gebilden, Geraden und Strahlbüscheln, die unter einander projectivisch sind, stattfinden.

I. Sind zwei Gerade A, A_1 (Fig. 8) mit einem und demselben Strahlbüschel B projectivisch, so dass also bestimmte Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \ldots.$ in der Geraden A und bestimmte Punkte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1, \ldots$ in der Geraden A_1 auf bestimmte Weise (§ 2) unter einem bestimmten Gesetze (§ 4) den Strahlen $a, b, c, d, \ldots.$ des Strahlbüschels B entsprechen, so sollen je zwei Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}_1$ u. s. w. der Geraden, welche demselben Strahl des Strahlbüschels entsprechen, ebenfalls »entsprechende Punkte« heissen, und die Geraden sollen, in Bezug auf das ganze System ihrer entsprechenden Punktenpaare, fortan »projectivisch« genannt werden. Und wenn die projectivischen Geraden A, A_1 solche besondere Lage haben, dass beide zugleich mit dem Strahlbüschel B perspectivisch sind (§ 2), dass nämlich jeder Strahl des Strahlbüschels durch die ihm entsprechenden Punkte beider Geraden geht, wie etwa in (Fig. 7), dann sollen die Geraden ebenfalls »perspectivisch« genannt werden, und dann heisst der Punkt B »Projectionspunkt«. Jede andere Lage der Geraden, die nicht perspectivisch ist, soll »schiefe Lage« heissen. Ferner sollen sowohl bei der schiefen, als bei der perspectivischen Lage der Geraden A, A_1, die Strahlen $a, b, c, \ldots\ldots$ oder diejenigen Geraden $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1, \ldots\ldots$, die durch entsprechende Punkte gehen, »Projectionsstrahlen« genannt werden. Bei der perspectivischen Lage der Geraden A, A_1 (Fig. 7) gehen also die Projectionsstrahlen durch einen bestimmten Punkt, durch den Projectionspunkt B, und bilden das genannte [**30**] Strahlbüschel B, bei der schiefen Lage dagegen (Fig. 9), treffen sie nicht in einem Punkte zusammen, sondern sie sind einem anderen sehr merkwürdigen Gesetze unterworfen, welches im dritten Kapitel näher untersucht werden wird.

Bei zwei projectivischen Geraden A, A_1 ist ferner die Eigenthümlichkeit der Parallelstrahlen in Erwähnung zu bringen. Befinden sich z. B. die Geraden mit dem Strahlbüschel B, und also auch unter sich, in perspectivischer Lage (Fig. 7), und sind q, r diejenigen Strahlen, die mit den Geraden parallel sind, also die Parallelstrahlen (§ 2), so entspricht mithin der Punkt $\mathfrak{q}_1$ in der Geraden A_1 dem unendlich entfernten Punkte $\mathfrak{q}$ der Geraden A, und es entspricht der Punkt $\mathfrak{r}$ in der Geraden A dem unendlich entfernten Punkte $\mathfrak{r}_1$ der Geraden A_1. Die zwei Punkte $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{r}$ sollen fortan »die Durchschnitte der Parallelstrahlen« genannt werden. Es ist klar, dass, wenn auch die Geraden A, A_1 in schiefe Lage gebracht werden (Fig. 9), dann die Projectionsstrahlen p, r oder $\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}\mathfrak{r}_1$ immerhin mit ihnen parallel bleiben (§ 2), weshalb letztere alsdann immer noch Parallelstrahlen heissen sollen.

Endlich ist noch zu bemerken, dass, wenn die Geraden A, A_1 perspectivisch sind (Fig. 7), dann in ihrem Durchschnittspunkte ($\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1$) zwei entsprechende Punkte $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}_1$ vereinigt sind, indem nämlich der Projectionsstrahl e offenbar beide Geraden zugleich in jenem Punkte schneidet.

II. Sind zwei Strahlbüschel B, B_1 (Fig. 11) mit einer und derselben Geraden A projectivisch, so dass also bestimmte Strahlen $a, b, c, d, \ldots\ldots$ des Strahlbüschels B, und bestimmte Strahlen $a_1, b_1, c_1, d_1, \ldots\ldots$ des Strahlbüschels B_1 der Reihe nach bestimmte Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \ldots\ldots$ der Geraden A, auf die oben (§ 2) [**31**] festgesetzte Weise, entsprechen, so sollen die Strahlenpaare a und a_1, b und b_1, c und c_1, u. s. w. der Strahlbüschel, welche demselben Punkte der Geraden A entsprechen, ebenfalls »entsprechende Strahlen« heissen, und die Strahlbüschel selbst sollen, in Beziehung auf das ganze System ihrer entsprechenden Strahlenpaare, fortan »projectivisch« genannt werden. Und wenn zwei projectivische Strahlbüschel B, B_1 solche besondere Lage haben, dass beide zugleich mit der Geraden A perspectivisch sind, dass nämlich in jedem Punkt der Geraden die zwei ihm entsprechenden Strahlen einander schneiden, wie etwa in (Fig. 10), oder auch in (Fig. 5), dann sollen die Strahlbüschel ebenfalls »perspectivisch« heissen, und dann soll die Gerade A ihr »perspectivischer Durchschnitt« genannt werden. Jede andere Lage der Strahlbüschel B, B_1, wo diese nicht perspectivisch sind, soll »schiefe Lage« heissen.

Bei zwei projectivischen Strahlbüscheln B, B_1 giebt es, im Allgemeinen, unter der unzähligen Menge entsprechender Strahlenpaare zwei bestimmte Paare, die sich vor allen übrigen auf eigenthümliche Weise auszeichnen, nämlich dadurch, dass sowohl die zwei Strahlen des einen als die des anderen Strahlbüschels zu einander rechtwinklig sind. Befinden sich z. B. die Strahlbüschel in perspectivischer Lage (Fig. 10), so ist im Allgemeinen nur ein einziger Kreis unter den Bedingungen möglich, dass er durch die Mittelpunkte B, B_1 beider Strahlbüschel gehe, und dass sein Mittelpunkt $\mathfrak{m}$ in dem perspectivischen Durchschnitt A liege. Sind $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ die Durchschnitte dieses Kreises $\mathfrak{m}$ und der Geraden A, so besitzen offenbar die zwei Strahlenpaare s und s_1, t und t_1, die jenen zwei Punkten entsprechen, die vorerwähnte Eigenthümlichkeit, da nämlich sowohl s und t, [32] als s_1 und t_1 rechte Winkel ($\mathfrak{s}B\mathfrak{t}$, $\mathfrak{s}B_1\mathfrak{t}$, Winkel im Halbkreise) einschliessen, und es folgt ferner, dass diesen zwei Strahlenpaaren nur allein die genannte Eigenthümlichkeit zukomme. Da diese Eigenschaft nicht von der Lage der Strahlbüschel abhängig ist, so findet das Nämliche statt, wenn sich die letzteren in schiefer Lage befinden (Fig. 11). Die zwei Strahlenpaare s, t und s_1, t_1, sollen fortan »die Schenkel der entsprechenden rechten Winkel« heissen.

Noch mag bemerkt werden, dass, wenn zwei Strahlbüschel B, B_1 perspectivisch sind (Fig. 10), dann allemal zwei entsprechende Strahlen e, e_1 aufeinander fallen, nämlich dieser vereinigte, oder gemeinschaftliche, Strahl $(e e_1)$ ist derjenige, welcher durch die Mittelpunkte B, B_1 der Strahlbüschel geht.

10. Bei projectivischen Geraden und bei projectivischen Strahlbüscheln kann zunächst nach den Gesetzen gefragt werden, welchen ihre entsprechenden Elementenpaare unterworfen sind.

Da zwei projectivische Gerade A, A_1, zufolge der obigen Erklärung (§ 9, I), mit einem und demselben Strahlbüschel B projectivisch sind, so folgt vermöge (§ 4, oder § 6) sogleich, dass zwischen irgend vier entsprechenden Punktenpaaren beider Geraden ein bestimmtes Gesetz stattfinden müsse. Denn sind a, b, c, d irgend vier Strahlen des Strahlbüschels B, und sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$ die ihnen entsprechenden Punkte in den Geraden A und A_1, so sind gewisse, von jenen Strahlen abhängige Doppelverhältnisse, sowohl gleich bestimmten Doppelverhältnissen die von den vier ersteren Punkten, als auch gleich bestimmten Doppelverhältnissen die von den vier letzteren Punkten abhängen, folglich müssen auch die letzteren [33] Doppelverhältnisse gleich jenen sein, die sich auf die vier ersteren Punkte beziehen, und folglich hat man (§ 4, II):

$$\text{I.}\left\{\begin{array}{ll} 1. & \dfrac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}:\dfrac{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}{\mathfrak{b}\mathfrak{d}}=\dfrac{\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1}:\dfrac{\mathfrak{a}_1\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{b}_1\mathfrak{d}_1}, \\[2ex] 2. & \dfrac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}\mathfrak{b}}:\dfrac{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}{\mathfrak{c}\mathfrak{d}}=\dfrac{\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{c}_1\mathfrak{b}_1}:\dfrac{\mathfrak{a}_1\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1}, \\[2ex] 3. & \dfrac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{d}\mathfrak{b}}:\dfrac{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}{\mathfrak{d}\mathfrak{c}}=\dfrac{\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{d}_1\mathfrak{b}_1}:\dfrac{\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{d}_1\mathfrak{c}_1}. \end{array}\right.$$

Da andererseits zwei projectivische Strahlbüschel B, B_1 mit einer und derselben Geraden A projectivisch sind, so folgt ähnlicher Weise wie vorhin, dass zwischen je vier entsprechenden Strahlenpaaren a, b, c, d und a_1, b_1, c_1, d_1 beider Strahlbüschel ein bestimmtes Gesetz stattfinden müsse, nämlich dass folgende von diesen Strahlen abhängige Doppelverhältnisse gleich sind (§ 4, II):

$$\text{II.}\left\{\begin{array}{ll} 4. & \dfrac{\sin(ac)}{\sin(bc)}:\dfrac{\sin(ad)}{\sin(bd)}=\dfrac{\sin(a_1c_1)}{\sin(b_1c_1)}:\dfrac{\sin(a_1d_1)}{\sin(b_1d_1)}, \\[2ex] 5. & \dfrac{\sin(ab)}{\sin(cb)}:\dfrac{\sin(ad)}{\sin(cd)}=\dfrac{\sin(a_1b_1)}{\sin(c_1b_1)}:\dfrac{\sin(a_1d_1)}{\sin(c_1d_1)}, \\[2ex] 6. & \dfrac{\sin(ab)}{\sin(cb)}:\dfrac{\sin(ac)}{\sin(dc)}=\dfrac{\sin(a_1b_1)}{\sin(d_1b_1)}:\dfrac{\sin(a_1c_1)}{\sin(d_1c_1)}. \end{array}\right.$$

Diese Gesetze (I, II) lassen sich, wie folgt, mit Worten aussprechen:

α) »*Bei zwei projectivischen Geraden A, A_1 haben jede vier entsprechende Punktenpaare* $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}_1$, *solche gemeinschaftliche Beziehung zu einander, dass die drei Doppelverhältnisse, die aus den gegenseitigen Abständen der vier Punkte* [34] *in der einen Geraden zusammengesetzt sind, gleich sind den drei Doppelverhältnissen, die sich aus den gegenseitigen Abständen der vier Punkte in der anderen Geraden zusammensetzen lassen.*«

α) »*Bei zwei projectivischen Strahlbüscheln B, B_1 haben jede vier entsprechende Strahlenpaare* a und a_1, b und b_1, c und c_1, d und d_1 *solche gemeinschaftliche Beziehung zu einander, dass die drei Doppelverhältnisse, die aus den Sinussen der Winkel zwischen den vier Strahlen des einen* [34] *Strahlbüschels zusammengesetzt sind, gleich sind den drei Doppelverhältnissen, die sich aus den Sinussen der Winkel zwischen den vier Strahlen des anderen Strahlbüschels zusammensetzen lassen.*«

Es ist wesentlich zu bemerken, dass bei den drei Ausdrücken (I) die vier Punkte in der einen Geraden auf entsprechende Weise einander zugeordnet (§ 4) sind, wie die vier Punkte in der anderen Geraden, und dass ferner die gegenseitige Lage der einander zugeordneten Punktenpaare ebenfalls in beiden Geraden übereinstimmend ist, nämlich in dem Ausdrucke (1), bezogen auf (Fig. 7 oder 8), folgen die zugeordneten Punktenpaare ($\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$; $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{d}_1$), sowohl in der einen als in der andern Geraden **abwechselnd aufeinander** (§ 4, 6), und in den Ausdrücken (2, 3) folgen die zugeordneten Punktenpaare ($\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{d}$; $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{d}_1$; oder $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$; $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{c}_1$) sowohl in der einen als in der andern Geraden **nacheinander** (§ 4, a). Dass diese Uebereinstimmung der gegenseitigen Lage der zugeordneten Punktenpaare in beiden Geraden immer stattfinde, folgt daraus, dass zwischen jeder Geraden und dem Strahlbüschel B, mit welchem beide projectivisch sind, eine ähnliche Uebereinstimmung obwaltet (Ende § 4), wodurch denn jene nothwendiger Weise bedingt wird.

Ganz ebenso wird man andererseits in den Ausdrücken (II), in Hinsicht der Zusammenordnung und der gegenseitigen Lage der zugeordneten Strahlenpaare in den zwei Strahlbüscheln B, B_1, eine gleiche Uebereinstimmung wahrnehmen.

[35] Vermöge dieser Uebereinstimmung und vermöge der obigen Ausdrücke (I, II) selbst folgt also, dass, wenn von den 8 Elementen, auf die sich einer dieser Ausdrücke bezieht, irgend 7 gegeben sind, dann das achte Element dadurch ganz unzweideutig bestimmt sei. Denn sind z. B. die 7 Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$; $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ gegeben, so ist der Werth des Verhält-

nisses $\mathfrak{a}_1\mathfrak{d}_1 : \mathfrak{b}_1\mathfrak{d}_1$ durch die drei übrigen Verhältnisse eines der drei Ausdrücke (I) gegeben, nun könnte aber der gesuchte Punkt $\mathfrak{d}_1$ diesem Werthe in zwei verschiedenen Lagen genügen, und zwar wobei er das eine Mal zwischen und das andere Mal jenseits der festen Punkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$ läge, allein da die gegenseitige Lage der vier Punkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$ mit der der vier Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ übereinstimmend sein muss, so wird dadurch entschieden, welche von den zwei Lagen dem Punkte $\mathfrak{d}_1$ nur allein zukommen könne. Auf ganz ähnliche Weise folgt, dass, wenn andererseits von den 8 Strahlen, auf welche sich die Ausdrücke (II) beziehen, irgend 7 gegeben sind, dann der achte genau bestimmt sei (vergl. § 6). Also folgen nachstehende Sätze:

β) »Das ganze System der entsprechenden Punktenpaare in zwei projectivischen Geraden A, A_1 ist bestimmt, wenn irgend drei Paare gegeben sind, d. h., sobald drei solche Paare gegeben sind, etwa $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ *und* $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, *so ist zu jedem beliebigen vierten Punkt* ($\mathfrak{d}$) *in der einen Geraden* (A) *der ihm entsprechende Punkt* $\mathfrak{d}_1$ *in der anderen Geraden, vermöge der Ausdrücke* (I) *genau bestimmt.«*

β) »Das ganze System der entsprechenden Strahlenpaare in zwei projectivischen Strahlbüscheln B, B_1 ist bestimmt, wenn irgend drei Paare gegeben sind, d. h., sobald drei solche Paare gegeben sind, etwa a, b, c, und a_1, b_1, c_1, so ist zu jedem beliebigen vierten Strahl (d) des einen Strahlbüschels (B) der ihm entsprechende Strahl (d_1) des anderen Strahlbüschels, vermöge der Ausdrücke (II), *genau bestimmt.«*

[36] Und zwar folgt (vergl. § 6, β):

γ) »Dass man in zwei Geraden A, A_1 ganz nach Willkür drei Punktenpaare, etwa $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}$ *und* $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}$ *und* $\mathfrak{c}_1$ *auswählen, und sodann festsetzen könne, die Geraden sollen projectivisch und diese drei Punktenpaare sollen entsprechende Punktenpaare sein.«*

γ) »Dass man in zwei Strahlbüscheln B, B_1 ganz nach Willkür drei Strahlenpaare, etwa a und a_1, b und b_1, c und c_1, auswählen, und sodann festsetzen könne, die Strahlbüschel sollen projectivisch und diese drei Strahlenpaare sollen entsprechende Strahlenpaare sein.«

Und ferner folgt durch Umkehrung:

δ) »Sind die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$,..... *und* $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$, ... *in zwei Geraden A und A_1 der Reihe nach solcher Gestalt gepaart, dass zwischen je vier Punktenpaaren die obigen Bedingungen stattfinden, nämlich dass sie dem Gesetze* (I) *genügen und dass die gegenseitige Lage der vier Punkte in der einen*

δ) »Sind die Strahlen a, b, c, d,..... und a_1, b_1, c_1, d_1,..... zweier Strahlbüschel B und B_1 der Reihe nach solcher Gestalt gepaart, dass zwischen je vier Strahlenpaaren die obigen Bedingungen stattfinden, nämlich dass sie dem Gesetze (II) *genügen und dass die gegenseitige Lage der vier Strahlen des einen*

Geraden mit der der vier Punkte in der anderen Geraden übereinstimmend ist, so sind die Geraden, in Beziehung auf alle jene Punktenpaare, projectivisch.«

Strahlbüschels mit der der vier Strahlen des anderen Strahlbüschels übereinstimmend ist, so sind die Strahlbüschel, in Beziehung auf alle jene Strahlenpaare, projectivisch.«

II. Bevor die besonderen Fälle der so eben aufgestellten Sätze (§ 10) untersucht werden, sollen diese nebst einigen früheren Sätzen erst kurz wiederholt, und noch einige erweiternde Folgerungen daraus gezogen werden, die sodann zusammen die Fundamentalsätze über projectivische Gerade und ebene Strahlbüschel ausmachen, und deshalb bei späteren Betrachtungen häufig Anwendung finden.

[37] I. Die Sätze (§ 4 und § 6) und die vorhin aus ihnen gefolgerten Sätze (§ 10) lassen sich, wie folgt, kurz zusammenfassen.

α) »Bei zwei projectivischen Gebilden — seien es eine Gerade und ein ebener Strahlbüschel, oder zwei Gerade, oder zwei ebene Strahlbüschel — sind die Doppelverhältnisse, welche durch irgend vier Elemente des einen Gebildes bestimmt werden, gleich den Doppelverhältnissen, welche durch die vier entsprechenden Elemente des anderen Gebildes bestimmt werden; ferner ist die gegenseitige Lage der vier Elemente des einen Gebildes übereinstimmend mit der der vier Elemente des anderen Gebildes.«

β) »Daher ist das ganze System der entsprechenden Elementenpaare zweier projectivischen Gebilde bestimmt, wenn irgend drei solcher Paare gegeben sind.«

γ) »Und zwar können solche drei Paare ganz nach Willkür angenommen werden.« Und umgekehrt (α):

δ) »Sind die Elemente zweier Gebilde dergestalt gepaart, dass die durch irgend vier Elemente des einen Gebildes bestimmten Doppelverhältnisse gleich sind den durch die vier entsprechenden Elemente des anderen Gebildes bestimmten Doppelverhältnisse, wobei nothwendiger Weise die jedesmaligen beiderseitigen vier Elemente übereinstimmende gegenseitige Lage haben müssen, so sind die Gebilde, in Beziehung auf alle jene Elementenpaare, projectivisch.«

[38] II. Aus den vorstehenden Sätzen folgt unmittelbar der nachstehende umfassende Satz:

α) »Sind zwei Gebilde — Gerade oder ebene Strahlbüschel — mit einem dritten projectivisch, so sind sie es auch unter sich.«

Dieser Satz umfasst nämlich nachstehende sechs Fälle, wovon die zwei ersten schon oben (§ 9) als Erklärung projectivischer Geraden und projectivischer Strahlbüschel gegeben wurden.

β) »*Sind zwei Gerade A, A_1 mit einem und demselben Strahlbüschel B projectivisch, so sind sie es auch unter sich.*«

γ) »*Sind eine Gerade A und ein Strahlbüschel B mit einer und derselben Geraden A_1 projectivisch, so sind sie es auch unter sich.*«

δ) »*Sind zwei Gerade A, A_1 mit einer dritten Geraden A_2 projectivisch, so sind sie es auch unter sich.*«

β) »*Sind zwei Strahlbüschel B, B_1 mit einer und derselben Geraden A projectivisch, so sind sie es auch unter sich.*«

γ) »*Sind ein Strahlbüschel B und eine Gerade A mit einem und demselben Strahlbüschel B_1 projectivisch, so sind sie es auch unter sich.*«

δ) »*Sind zwei Strahlbüschel B, B_1 mit einem dritten Strahlbüschel B_2 projectivisch, so sind sie es auch unter sich.*«

III. Durch Wiederholung und Zusammensetzung der vorstehenden Sätze (II) gelangt man unmittelbar zu dem nachfolgenden ausgedehnteren Satze.

»Ist bei irgend einer Anzahl n Gebilden — Gerade und ebene Strahlbüschel — in irgend einer bestimm-Ordnung genommen, der Reihe nach jedes Gebilde mit dem darauf folgenden projectivisch, so ist jedes mit jedem, also namentlich auch das erste mit dem letzten, projectivisch.«

12. Was nun die vorhin erwähnten besonderen [39] Fälle anbetrifft (§ 11), so sind davon zwei Arten zu unterscheiden, nämlich entweder sind bei beliebigen Gebilden solche Elementenpaare zu betrachten, für welche die Ausdrücke (§ 10, I, II) wesentlich vereinfacht, oder es sind solche Gebilde zu betrachten, bei denen für je vier entsprechende Elementenpaare jene Ausdrücke vereinfacht werden.

Die besonderen Fälle der ersten Art entstehen dadurch, dass durch die Eigenthümlichkeit der Elementenpaare entweder einzelne Verhältnisse in den genannten Ausdrücken $= 1$, oder dass der Werth eines Doppelverhältnisses $= 1$ wird. Die wichtigsten Fälle der Art sind folgende.

I. Nimmt man bei zwei projectivischen Geraden A, A_1, anstatt der Punktenpaare $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}_1$, die zwei Punktenpaare $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}_1$, die den Parallelstrahlen zugehören, wo nämlich $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}_1$ die unendlich entfernten Punkte der Geraden A, A_1, und wo $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{r}$ die sogenannten Durchschnitte der Parallelstrahlen sind (§ 9, I), so werden die Ausdrücke (§ 10, I) zufolge (§ 7, I), wie folgt vereinfacht:

$$1)\quad 1 : \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{r}}{\mathfrak{b}\mathfrak{r}} = \frac{\mathfrak{a}_1\mathfrak{q}_1}{\mathfrak{b}_1\mathfrak{q}_1} : 1$$

$$2)\quad \mathfrak{a}\mathfrak{b} : \mathfrak{a}\mathfrak{r} = \frac{\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{q}_1\mathfrak{b}_1} : 1$$

$$3)\quad \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{r}\mathfrak{b}} : 1 = \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 : \mathfrak{a}_1\mathfrak{q}_1.$$

Aus dem ersteren Ausdrucke (I), der bei späteren Betrachtungen durch zweckmässige Anwendung zu merkwürdigen Folgerungen führt, folgt:

$$\alpha)\quad \mathfrak{b}\mathfrak{r} : \mathfrak{a}\mathfrak{r} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{q}_1 : \mathfrak{b}_1\mathfrak{q}_1, \text{ oder}$$

$$\beta)\quad \mathfrak{a}\mathfrak{r} \,.\, \mathfrak{a}_1\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{b}\mathfrak{r} \,.\, \mathfrak{b}_1\mathfrak{q}_1.$$

Nimmt man andererseits bei zwei projectivischen Strahlbüscheln B, B_1, anstatt der Strahlenpaare c und c_1, [40]
d und d_1, die zwei rechtwinkligen entsprechenden Strahlenpaare s und s_1, t und t_1, d. h., die Schenkel der entsprechenden rechten Winkel, wo nämlich sowohl s und t, als s_1 und t_1 zu einander rechtwinklig sind (§ 9, II), so werden die Ausdrücke (§ 10, II) ebenfalls vereinfacht, und namentlich wird aus dem ersteren derselben (welcher wichtiger ist, als die beiden übrigen), wenn man bemerkt, dass $\sin(90^0 \pm x) = \cos x$, also z. B. $\sin(at) = \cos(as)$:

$$4)\quad \frac{\sin(as)}{\sin(bs)} : \frac{\cos(as)}{\cos(bs)} = \frac{\cos(a_1 t_1)}{\cos(b_1 t_1)} : \frac{\sin(a_1 t_1)}{\sin(b_1 t_1)}$$

oder:

$$\gamma)\quad \operatorname{tg}(as) : \operatorname{tg}(bs) = \operatorname{tg}(b_1 t_1) : \operatorname{tg}(a_1 t_1), \text{ und}$$

$$\delta)\quad \operatorname{tg}(as) \cdot \operatorname{tg}(a_1 t_1) = \operatorname{tg}(bs) \cdot \operatorname{tg}(b_1 t_1).$$

Ebenso hat man:

$$\gamma_1)\quad \operatorname{tg}(at) : \operatorname{tg}(bt) = \operatorname{tg}(b_1 s_1) : \operatorname{tg}(a_1 s_1), \text{ und}$$

$$\delta_1)\quad \operatorname{tg}(at) \cdot \operatorname{tg}(a_1 s_1) = \operatorname{tg}(bt) \cdot \operatorname{tg}(b_1 s_1).$$

Die Ausdrücke (β, δ, δ_1) enthalten, mit Worten ausgesprochen, nachfolgende merkwürdige Sätze.

»*Bei zwei projectivischen Geraden A, A_1 ist das Rechteck* ($\mathfrak{a}\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{a}_1\mathfrak{q}_1$) *unter den Abständen irgend zweier entsprechenden Punkte* ($\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$; oder $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$, ..) *von den Durchschnitten* ($\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_1$) *der Parallelstrahlen unveränderlich, d. h., für alle Punktenpaare hat dieses Rechteck einerlei Inhalt.*«

»*Bei zwei projectivischen Strahlbüscheln B, B_1 ist das Produkt aus den Tangenten der Winkel, welche irgend zwei entsprechende Strahlen mit den ungleichnamigen Schenkeln* (s, t_1, oder s_1, t) *der entsprechenden rechten Winkel einschliessen, von unveränderlichem Werthe.*«

Wenn also bei zwei projectivischen Geraden A, A_1 die Durchschnitte ($\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_1$) der Parallelstrahlen und ausserdem irgend ein Paar entsprechende Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ gegeben sind, so sind die Ausdrücke (α, β), durch welche zu irgend einem Punkte der einen Geraden, etwa zu dem Punkte $\mathfrak{b}$ in der Geraden A, der entsprechende Punkt [**41**] $\mathfrak{b}_1$ in der anderen Geraden A_1 bestimmt wird, sehr einfach und bequem. Nebstdem nämlich, dass durch die genannten Ausdrücke über die Grösse des Abstandes ($\mathfrak{b}_1\mathfrak{q}_1$) des Punktes $\mathfrak{b}_1$ von dem Durchschnitte $\mathfrak{q}_1$ des Parallelstrahls entschieden wird, wird durch die Uebereinstimmung der gegenseitigen Lage der Punkte in beiden Geraden, die Lage des Punktes $\mathfrak{b}_1$ genau bestimmt, denn je nachdem die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ auf einerlei oder auf verschiedenen Seiten des Punktes $\mathfrak{r}$ liegen, befinden sich übereinstimmend die Punkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$ auf einerlei oder auf entgegengesetzten Seiten des Punktes $\mathfrak{q}_1$ (§ 10). Wie leicht zu sehen, findet andererseits bei den zwei Strahlbüscheln B, B_1 in Rücksicht der Ausdrücke (γ, δ), Aehnliches statt.

Es ist ferner leicht zu sehen, dass umgekehrt, wenn in zwei projectivischen Geraden A, A_1 irgend drei entsprechende Punktenpaare $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ gegeben sind, dann durch dieselben die Durchschnitte $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_1$ der Parallelstrahlen bestimmt und mittelst der Ausdrücke (1, 2, 3) oder (§ 10, I) zu finden sind; und dass eben so, wenn in zwei projectivischen Strahlbüscheln B, B_1 irgend drei entsprechende Strahlenpaare a, b, c und a_1, b_1, c_1 gegeben sind, dann die Schenkel (s, t, s_1, t_1) der entsprechenden rechten Winkel (st), (s_1t_1) vermöge der Ausdrücke (§ 10, II) bestimmt und zu finden sind.

II. Von den Ausdrücken (§ 10, I, II), auf (Fig. 7, 8 und 10, 11) bezogen, gestatten, vermöge der gegenseitigen Lage der Elemente, nur zwei, nämlich nur die Ausdrücke (§ 10, 1, 4), den besonderen Fall, dass der Werth der darin enthaltenen Doppelverhältnisse = 1 wird, und da alsdann die beiderseitigen vier Elemente, auf die sich der jedesmalige Ausdruck bezieht, zugleich harmonisch sind (§ 8, I, α), so folgt also (was zum Theil schon in § 8, II ausgesprochen):

[42] »*Dass bei zwei projectivischen Geraden A, A_1 irgend vier harmonischen Punkten in der einen Geraden auch vier harmonische Punkte in der anderen Geraden entsprechen.*«

[42] »*Dass bei zwei projectivischen Strahlbüscheln B, B_1 irgend vier harmonische Strahlen in dem einen Büschel auch vier harmonische Strahlen in dem anderen Büschel entsprechen.*«

Und umgekehrt (§ 8, I, β):

»*Sind in jeder von zwei Geraden A, A_1 irgend vier harmonische Punkte* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ *gegeben, so kann man auf acht verschiedene Arten festsetzen, die Geraden sollen projectivisch und iene Punkte sollen entsprechende Punktenpaare sein, und zwar ist dazu nur erforderlich, dass in jedem Falle irgend zwei zugeordnete harmonische Punkte der einen Geraden auch zwei zugeordneten harmonischen Punkten der anderen Geraden entsprechen.*«

»*Sind in jedem von zwei Strahlbüscheln B, B_1 irgend vier harmonische Strahlen a, d, b, c und a_1, d_1, b_1, c_1 gegeben, so kann man auf acht verschiedene Arten festsetzen, die Strahlbüschel sollen projectivisch und jene Strahlen sollen entsprechende Strahlenpaare sein, und zwar ist dazu nur erforderlich, dass in jedem Falle irgend zwei zugeordnete harmonische Strahlen des einen Strahlbüschels auch zwei zugeordneten harmonischen Strahlen des anderen Strahlbüschels entsprechen.*«

13. Die besonderen Fälle der zweiten Art (§ 12) bestehen darin, dass bei den projectivischen Geraden A, A_1 entweder je zwei entsprechende Abschnitte gleiches Verhältniss zu einander haben, oder einander gleich sind, und dass bei den projectivischen Strahlbüscheln B, B_1 je zwei entsprechende Winkel einander gleich sind. Von der Möglichkeit dieser Fälle kann man sich leicht überzeugen, wenn man die Gebilde in perspectivischer Lage betrachtet, nämlich wie folgt.

I. a) Bei zwei perspectivischen Geraden A, A_1 können die besonderen Umstände eintreten, dass entweder [**43**] α) der Projectionspunkt B (§ 9) unendlich entfernt liegt, so dass die Projectionsstrahlen a, b, c,..... sämmtlich parallel sind, wie z. B. (Fig. 12), oder β) die Geraden A, A_1 können parallel sein, und der Projectionspunkt B entweder 1) zwischen, wie (Fig. 6), oder 2) jenseits derselben liegen, wie (Fig. 13). In jedem dieser Fälle findet offenbar die besondere Eigenschaft statt: »Dass je zwei entsprechende Abschnitte der Geraden A, A_1 einerlei Verhältniss haben«, so dass man also, statt des obigen Gesetzes (§ 10, I), in diesem Falle z. B. hat:

$$1.\quad \frac{\mathfrak{ab}}{\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1}=\frac{\mathfrak{ac}}{\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1}=\frac{\mathfrak{ad}}{\mathfrak{a}_1\mathfrak{d}_1}=\frac{\mathfrak{bc}}{\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1}=\text{u. s. w.}$$

Zwei Gerade, denen diese besondere Eigenschaft zukommt, sollen fortan projectivisch »ähnlich« heissen.

Aus dem Vorstehenden folgt unmittelbar:

»Dass das ganze System der entsprechenden Punktenpaare zweier projectivisch ähnlicher Geraden A, A_1 bestimmt sei, wenn irgend zwei solche Paare gegeben sind.« Und

»Dass man nach Willkür zwei solche Paare annehmen und sodann festsetzen könne, die Geraden sollen projectivisch ähnlich und jene Paare sollen entsprechende Punktenpaare sein.«

Ferner folgt, mit Rücksicht auf das Gesetz (§ 10, I):

»Dass zwei projectivische Gerade A, A_1 allemal ähnlich sind, sobald irgend drei Paar entsprechende Abschnitte, welche durch drei Paar entsprechende Punkte, etwa $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, bestimmt werden, gleiches Verhältniss haben, d. h. wenn $\mathfrak{ab}:\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1=\mathfrak{ac}:\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1=\mathfrak{bc}:\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$ ist.« Und

[44] »Dass zwei projectivische Gerade ähnlich sind und perspectivisch liegen, sobald irgend drei Projectionsstrahlen, etwa a, b, c, parallel sind.«

Noch bleibt ein Umstand zu bemerken, der bei späteren Betrachtungen interessante Folgen nach sich zieht, nämlich dass bei projectivisch ähnlichen Geraden A, A_1, jedem endlich entfernten Punkte der einen Geraden, ein eben solcher Punkt in der anderen Geraden entspricht. Denn in (Fig. 12) findet offenbar gar kein Parallelstrahl q statt (§ 9, I), und in (Fig. 6 und 13) haben beide Geraden einen gemeinschaftlichen Parallelstrahl q. Daher folgt also nothwendiger Weise:

»Dass bei zwei projectivisch ähnlichen Geraden ihre zwei unendlich entfernten Punkte ($\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}_1$) entsprechende Punkte sind.« Und umgekehrt:

»Dass, wenn bei zwei projectivischen Geraden ihre unendlich entfernten Punkte entsprechende Punkte sind, so sind die Geraden ähnlich.«

b) Wenn ferner bei zwei projectivischen Geraden A, A_1 entweder α) die Projectionsstrahlen $a, b, c, \ldots$ parallel (Fig. 12) und beide Gerade mit ihnen gleiche Winkel einschliessen (so dass $\mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}$), oder β) wenn die Geraden parallel und der Projectionspunkt B in der Mitte zwischen ihnen liegt (Fig. 6), oder endlich γ) wenn sowohl die Geraden als die Projectionsstrahlen unter sich parallel sind (Fig. 14): dann findet offenbar die besondere Eigenschaft statt: »Dass je zwei entsprechende Abschnitte der Geraden A, A_1 einander gleich sind, so dass man, statt des vorigen Gesetzes (a, I), in diesem Falle hat:

[45] 2. $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{a}\mathfrak{c} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{c} = \mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$ u. s. w.

In dem gegenwärtigen Falle sollen deshalb die Geraden A, A_1 projectivisch »gleich« (congruent) heissen.

Dieser Betrachtung zufolge ist also »bei zwei projectivisch gleichen Geraden das ganze System der entsprechenden Punktenpaare bestimmt, sobald ein einziges Paar gegeben ist.«

Auch folgt, wie leicht zu sehen, »dass zwei projectivische Gerade A, A_1 allemal gleich sind, sobald irgend drei Paar entsprechende Abschnitte derselben, welche durch drei entsprechende Punktenpaare, etwa $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, bestimmt werden, einander gleich sind, d. h., wenn $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{a}\mathfrak{c} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1$, und $\mathfrak{b}\mathfrak{c} = \mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$ ist.«

Endlich folgt (a): »Dass bei zwei projectivisch gleichen Geraden ihre unendlich entfernten Punkte entsprechende Punkte sind.«

II. Zwei perspectivische Strahlbüschel B, B_1 können insbesondere so sein, dass entweder α) ihr perspectivischer Durchschnitt A (§ 9, II) zu ihrem gemeinschaftlichen Strahle ($e e_1$) rechtwinklig und von den Mittelpunkten B, B_1 der Strahlbüschel gleich weit entfernt ist, wie etwa (Fig. 5), so dass je zwei entsprechende Strahlen gleiche Stücke von einander abschneiden, nämlich $B\mathfrak{a} = B_1\mathfrak{a}$, $B\mathfrak{b} = B_1\mathfrak{b}$, u. s. w., oder β) dass je zwei entsprechende Strahlen parallel sind, welches nämlich dann eintreten würde, wenn man in Gedanken die Figur 10 sich so verändern liesse, dass, während die Mittelpunkte B, B_1 der Strahlbüschel fest blieben, deren perspectivischer Durchschnitt $\mathfrak{A}$ sich ins Unendliche entfernte, wodurch (Fig. 15) entstände. In jedem dieser zwei Fälle findet offenbar die besondere Eigenthümlichkeit statt:

[46] »Dass je zwei entsprechende Winkel der zwei Strahlbüschel B, B_1 einander gleich sind«; so dass man also, statt des obigen Gesetzes (§ 10, II), nur die einfache Beziehung hat:

3. $(ab) = (a_1 b_1)$, $(ac) = (a_1 c_1)$, $(bc) = (b_1 c_1)$ u. s. w.

Zwei Strahlbüschel, denen diese besondere Eigenschaft zukommt, sollen projectivisch »gleich« heissen.

Es folgt aus dieser Eigenschaft unmittelbar: »Dass das ganze System der entsprechenden Strahlenpaare zweier projectivisch gleicher Strahlbüschel bestimmt sei, sobald ein einziges solches Paar, etwa a, a_1, gegeben ist.« Jedoch sind dabei, in Hinsicht der Aufeinanderfolge der Strahlen, oder der Lage der Strahlbüschel, zwei Fälle zu unterscheiden. Nämlich man kann die Strahlen der Reihe nach in beiden Strahlbüscheln entweder in gleicher oder in umgekehrter Ordnung aufeinanderfolgend annehmen; d. h., man kann annehmen die Strahlen $a, d, b, c, \ldots\ldots$ und $a_1, d_1, b_1, c_1, \ldots\ldots$ folgen sich, von den Mittelpunkten der Strahlbüschel aus betrachtet, entweder 1) in beiden Strahlbüscheln rechtsherum, oder in beiden linksherum, wie z. B. (Fig. 15), oder 2) in dem einen Strahlbüschel rechtsherum und in dem anderen linksherum, wie z. B. (Fig. 5). Das Gesagte findet statt, die Strahlbüschel mögen sich in perspectivischer oder schiefer Lage befinden. Im Falle (1) sollen die Strahlbüschel »gleichliegend« und im Falle (2) sollen sie »ungleichliegend« heissen. Wird der eine Strahlbüschel in Gedanken umgewandt, und wiederum zu dem anderen in dieselbe Ebene gelegt, so wird die Ordnungsfolge seiner Strahlen offenbar eine andere, so dass, wenn die Strahlbüschel vorher gleichliegend waren, sie jetzt ungleichliegend sind, und auch umgekehrt. Dieser Unterschied der Lage zweier [47] projectivisch gleicher Strahlbüschel giebt sich weiter unten, bei der Erzeugung der Kegelschnitte, auf sehr auffallende Weise kund.

Es fogt ferner: »Dass zwei projectivische Strahlbüschel B, B_1 allemal gleich sind, sobald irgend drei Paar entsprechende Winkel derselben, welche durch drei entsprechende Strahlenpaare bestimmt werden, gleich sind.« Und:

»Dass daher zwei projectivische Strahlbüschel gleich sind und perspectivisch liegen, sobald irgend drei entsprechende Strahlenpaare parallel sind.«

Endlich mag noch bemerkt werden, dass es bei zwei projectivisch gleichen Strahlbüscheln nicht nur ein Paar entsprechende rechte Winkel giebt (§ 9, II), sondern dass vielmehr jedem rechten Winkel des einen Strahlbüschels auch ein eben solcher im anderen entspricht.

Von der gegenseitigen Lage der Gebilde und den durch sie bedingten Sätzen und Aufgaben.

14. Nachdem die allgemeinen und besonderen Gesetze, die zwischen den entsprechenden Elementenpaaren zweier projectivischer Geraden A, A_1 und zweier projectivischer Strahlbüschel B, B_1 stattfinden, untersucht worden, sind nunmehr die Eigenschaften, welche von der gegenseitigen Lage der Gebilde herrühren, genau zu betrachten, und zwar sollen zunächst die Merkmale aufgesucht werden, woran man erkennt, ob zwei solche Gebilde sich in perspectivischer oder in schiefer Lage befinden.

Da bei zwei projectivischen Geraden A, A_1, wenn sie perspectivisch liegen, zwei entsprechende Punkte [48] ($\mathfrak{e}, \mathfrak{e}_1$) in ihrem Durchschnitte vereinigt sind (§ 9, I), und da das ganze System ihrer entsprechenden Punktenpaare bestimmt ist, sobald irgend drei Paare gegeben sind (§ 10, β): so folgt nothwendiger Weise, dass sie sich allemal in perspectivischer Lage befinden werden, wenn entweder irgend zwei entsprechende Punkte in ihrem Durchschnitt vereinigt sind, oder wenn irgend drei Projectionsstrahlen in einem Punkte zusammentreffen. Sind z. B. die Geraden A, A_1 (Fig. 8), in Ansehung der Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$,..... und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$,..... projectivisch, und man denkt sich dieselben in solche Lage gebracht, dass irgend zwei entsprechende Punkte, etwa $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}_1$, zusammenfallen (Fig. 7), so müssen alle Projectionsstrahlen $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$,..... durch einen und denselben Punkt gehen. Denn fände dieses nicht statt, so könnte man den Punkt B, in welchem irgend zwei Strahlen, etwa $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$, sich begegnen, als Mittelpunkt eines Strahlbüschels B annehmen, und dann würde letzterer die Geraden A, A_1 projectivisch schneiden (§ 9, I), und zwar wären $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}_1$ drei entsprechende Punktenpaare; da aber durch drei Paar entsprechende Punkte das ganze System der entsprechenden Punktenpaare bestimmt ist (§ 10, β), so muss das neue System von entsprechenden Punktenpaaren mit dem gegebenen völlig übereinstimmen, und folglich muss jeder Strahl c, d,..... des Strahlbüschels B durch zwei gegebene entsprechende Punkte $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}_1$,..... oder umgekehrt, jeder Strahl $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1$,....., der ein Paar gegebene entsprechende Punkte $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}_1$,..... verbindet, muss durch den Punkt B gehen. Denkt man sich ferner die gegebenen Geraden A, A_1 (Fig. 8) in solche Lage gebracht, dass irgend drei Projectionsstrahlen, etwa $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$, einander in einem Punkte B treffen (Fig. 7), so müssen alle übrigen [49] Projectionsstrahlen $\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1$,..... durch diesen nämlichen Punkt gehen. Denn nimmt man in der That den Punkt B als Mittelpunkt eines Strahlbüschels an, so schneidet derselbe die Geraden A, A_1 projectivisch, und zwar so, dass $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}_1$ drei entsprechende Punktenpaare sind, allein da diese Punktenpaare auch zu dem gegebenen System von entsprechenden Punktenpaaren gehören, so sind die Geraden in beiden Fällen für die nämlichen Punktenpaare projectivisch, und folglich geht jeder Strahl d,..... des Strahlbüschels B durch zwei gegebene entsprechende Punkte $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}_1$,..... der Geraden A, A_1, oder umgekehrt jeder Projectionsstrahl der Geraden geht durch jenen Punkt B, und folglich liegen die Geraden perspectivisch.

Da andererseits bei zwei projectivischen Strahlbüscheln B, B_1, wenn sie perspectivisch liegen, zwei entsprechende Strahlen (e, e_1) zusammenfallen (§ 9, II), und da das ganze System ihrer entsprechenden Strahlenpaare bestimmt ist, sobald irgend drei Paare gegeben sind (§ 10, β): so ist klar, dass sie sich allemal in perspectivischer Lage befinden werden, wenn entweder irgend zwei entsprechende Strahlen aufeinander fallen, oder wenn die Durchschnitte von irgend drei entsprechenden Strahlenpaaren in einer und derselben Geraden liegen. Sind z. B. die Strahlbüschel B, B_1 (Fig. 11), in Ansehung des Systems von entsprechenden Strahlen a, b, c,..... und a_1, b_1, c_1,..... projectivisch, und man denkt sich dieselben in solche Lage versetzt, dass irgend zwei entsprechende Strahlen, etwa e und e_1, aufeinander fallen (Fig. 10), so müssen jede zwei entsprechende Strahlen a und a_1, b und b_1,

c und c_1, ... sich auf einer und derselben Geraden A schneiden. Denn legt man durch zwei solche Durchschnitte, etwa durch die Durchschnitte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ der Strahlenpaare a und a_1, b und b_1, [50] eine Gerade A, so würden, wenn man für einen Augenblick, um die Mittelpunkte B, B_1, statt der gegebenen Strahlbüschel, sich andere denken wollte, welche die Gerade A zum perspectivischen Durchschnitt (§ 9, II) hätten, dieselben von den gegebenen nicht verschieden sein können, weil sie mit ihnen die drei entsprechenden Strahlenpaare a und a_1, b und b_1, e und e_1, wodurch das ganze System der entsprechenden Strahlenpaare bestimmt wird, gemein hätten, folglich schneiden sich je zwei entsprechende Strahlenpaare c und c_1, d und d_1, ... der gegebenen Strahlbüschel auf der nämlichen Geraden A, und folglich liegen die Strahlbüschel perspectivisch. Wird ferner angenommen, die gegebenen Strahlbüschel B, B_1 (Fig. 11) seien in solche Lage versetzt, dass irgend drei entsprechende Strahlenpaare, etwa a und a_1, b und b_1, c und c_1, sich auf einer Geraden A schneiden (Fig. 10), so würden, eben so wie vorhin, wenn man sich um die Mittelpunkte B, B_1, ausser den gegebenen Strahlbüscheln, noch andere denken wollte, welche die Gerade A zum perspectivischen Durchschnitt hätten, dieselben nicht von den gegebenen verschieden sein können, weil sie mit ihnen die genannten drei entsprechenden Strahlenpaare gemein hätten, folglich müssen die gegebenen Strahlbüschel perspectivisch liegen, und die Gerade A zum perspectivischen Durchschnitt haben.

Demnach hat man nachstehende Sätze:

»*Zwei projectivische Gerade A, A_1 befinden sich allemal in perspectivischer Lage, wenn entweder α) irgend zwei entsprechende Punkte in ihrem Durchschnitte vereinigt sind; oder β) wenn irgend* [51] *drei Projectionsstrahlen in einem Punkte zusammentreffen.*« Und umgekehrt: »*Wenn von diesen zwei Umständen (α oder β) der eine oder der andere entschieden nicht stattfindet, so befinden sich die Geraden allemal in schiefer Lage.*«

»*Zwei projectivische Strahlbüschel B, B_1 befinden sich allemal in perspectivischer Lage, wenn entweder α) irgend zwei entsprechende Strahlen aufeinander fallen, oder β) wenn irgend* [51] *drei entsprechende Strahlenpaare sich auf einer Geraden schneiden.*« Und umgekehrt: »*Wenn von diesen zwei Umständen (α oder β) der eine oder der andere entschieden nicht stattfindet, so befinden sich die Strahlbüschel allemal in schiefer Lage.*«

Demnach können zwei projectivische Gerade, oder zwei projectivische Strahlbüschel auf unzählig viele verschiedene

Arten in perspectivische Lage gebracht werden, indem man jede zwei entsprechende Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}_1$,..... oder Strahlen a und a_1, b und b_1, c und c_1,..... vereinigen kann.

Insbesondere ist hierüber folgendes zu bemerken.

I. Für projectivisch ähnliche (oder gleiche) Gerade folgen aus dem obigen Satze nachstehende besondere Sätze:

»Zwei projectivisch ähnliche Gerade A, A_1 liegen allemal perspectivisch, wenn irgend zwei entsprechende Punkte ($\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$, oder b und b_1,....., oder $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}_1$) in ihrem gegenseitigen Durchschnitte vereinigt sind, und zwar a) wenn zwei endlich entfernte entsprechende Punkte vereinigt sind, wie z. B. $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}_1$ (Fig. 12), so sind die Projectionsstrahlen a, b, c,..... sämmtlich parallel, so dass der Projectionspunkt B unendlich entfernt liegt; und b) wenn die unendlich entfernten, einander entsprechenden (§ 13, I) Punkte $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}_1$ der Geraden vereinigt sind, d. h., wenn die Geraden parallel sind, dann treffen alle Projectionsstrahlen in einem endlich entfernten Punkte B zusammen, der entweder zwischen (Fig. 6), oder jenseits (Fig. 13) [52] der Geraden liegt (sind die Geraden gleich, so liegt der Projectionspunkt B im ersten Falle in der Mitte zwischen ihnen (Fig. 6), und im anderen Falle liegt er unendlich entfernt (Fig. 14)).«

Und ferner folgt:

»Findet sich, dass bei zwei projectivischen Geraden irgend drei Projectionsstrahlen parallel sind, so schliesst man daraus, dass die Geraden ähnlich (oder gleich) sind, und dass sie perspectivisch liegen (§ 13, I, a).«

II. Für Strahlbüschel folgt insbesondere:

»Dass zwei projectivisch gleiche Strahlbüschel B, B_1 allemal perspectivisch liegen, wenn irgend zwei entsprechende Strahlen (a und a_1, b und b_1,...) aufeinander fallen, und zwar dass a) wenn sie gleichliegend sind (§ 13, II), je zwei entsprechende Strahlen unter sich parallel, mithin ihr perspectivischer Durchschnitt A unendlich entfernt ist; oder b) wenn sie ungleichliegend sind, ihr perspectivischer Durchschnitt A auf ihrem gemeinschaftlichen Strahle BB_1 rechtwinklig steht und ihn hälftet (Fig. 5).«

Und ferner:

»Findet sich, dass bei zwei projectivischen Strahlbüscheln irgend drei Paar entsprechende Strahlen parallel sind, so folgt daraus, dass die Strahlbüschel gleich, gleichliegend und perspectivisch sind (§ 13, II).«

15. Ueber die perspectivische Lage zweier projectivischer Geraden oder zweier projectivischer Strahlbüschel ist noch folgendes zu bemerken.

Da sich zwei projectivische Gerade A, A_1 allemal in perspectivischer Lage befinden, sobald in ihrem [53] Durchschnitte irgend zwei entsprechende Punkte vereinigt sind (§ 14), so hat folglich der von ihnen eingeschlossene Winkel auf diese Eigenschaft keinen Einfluss. Hält man die eine Gerade, etwa A (Fig. 7), fest, während man die andere A_1 um ihren gemeinschaftlichen Durchschnitt $(\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1)$ herumbewegt, so jedoch, dass die nämlichen zwei entsprechenden Punkte $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}_1$ stets vereinigt bleiben, so werden also die Geraden keinen Augenblick aufhören perspectivisch zu sein, allein ihr Projectionspunkt B wird offenbar gleichzeitig mit A_1 seinen Ort ändern, und es entsteht daher die Frage, in welcher Linie er sich bewegen werde?

Vermöge der Parallelstrahlen q, r ist diese Frage leicht zu beantworten. Denn da dieselben stets den Geraden A, A_1 parallel bleiben, und da ihre Durchschnitte $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{r}$, der Voraussetzung gemäss, ihre Abstände von dem Durchschnitte $(\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1)$ der Geraden, nicht ändern, so dass die Abschnitte $\mathfrak{q}_1\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{r}\mathfrak{e}$ der Grösse nach unveränderlich sind, so bleiben folglich auch die beiden übrigen Seiten $\mathfrak{r}B$, $\mathfrak{q}_1B$ des Parallelogramms $B\mathfrak{r}(\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1)\mathfrak{q}_1$ der Grösse nach unveränderlich, und da endlich der Punkt $\mathfrak{r}$, als in A liegend, fest bleibt, so muss sich folglich der Projectionspunkt B in derjenigen Kreislinie bewegen, welche $\mathfrak{r}B$ zum Halbmesser und $\mathfrak{r}$ zum Mittelpunkt hat.

Da zwei projectivische Strahlbüschel B, B_1 in einer Ebene sich allemal in perspectivischer Lage befinden, sobald irgend zwei entsprechende Strahlen aufeinander fallen (§ 14), so hat folglich der Abstand (BB_1) ihrer Mittelpunkte von einander auf diese Eigenschaft keinen Einfluss. Hält man das eine Strahlbüschel, etwa B (Fig. 10), fest, während man das andere B_1 ihm näher oder ferner rücken lässt, so jedoch, dass stets die nämlichen zwei entsprechenden Strahlen e und e_1 [54] vereinigt bleiben, so werden also die Strahlbüschel fortwährend perspectivisch sein, allein ihr perspectivischer Durchschnitt A muss offenbar gleichzeitig mit dem Strahlbüschel B_1 seinen Ort ändern, und es entsteht daher die Frage, was das Eigenthümliche seiner Bewegung sei?

Diese Frage ist mittelst der Parallelstrahlen q, q_1 leicht zu beantworten. Denn da das Strahlbüschel B_1, der Voraussetzung gemäss, sich ohne Drehung bewegt, so bewegt sich folglich jeder Strahl desselben sich selbst parallel, folglich bleiben die entsprechenden Strahlen q, q_1 stets parallel, sie sind folglich beständig die Parallelstrahlen, und folglich muss sich auch der perspectivische Durchschnitt A sich selbst parallel bewegen, nämlich er muss stets dem festen Strahl q parallel sein.

Demnach hat man nachstehende Sätze.

»Wenn von zwei perspectivischen Geraden A, A_1 die eine fest bleibt, während die andere sich um ihren gemeinschaftlichen Durchschnitt dreht, ohne zu gleiten, so dass stets dieselben zwei entsprechenden Punkte vereinigt bleiben, so bewegt sich der Projectionspunkt B in einer bestimmten Kreislinie, welche einen der beiden Durchschnitte ($\mathfrak{q}_1\mathfrak{r}$) der Parallelstrahlen, nämlich denjenigen, der in der festen Geraden liegt, zum Mittelpunkt hat.«

»Wenn von zwei perspectivischen Strahlbüscheln B, B_1 das eine fest bleibt, während das andere sich so bewegt, dass stets dieselben zwei entsprechenden Strahlen vereinigt bleiben, also ohne sich zu drehen, so bewegt sich der perspectivische Durchschnitt A sich selbst parallel, und zwar durch die ganze Ebene fort, d. h. er gelangt nach und nach in die Lage von jeder Geraden, welche mit der anfänglichen Geraden A parallel ist.«

Es ist hiebei noch folgendes zu bemerken:

I. Bringt man, während die Gerade A immerhin [55] fest bleibt, die Gerade A_1 in andere Lage, so dass nacheinander immer andere entsprechende Punkte in dem Durchschnitte der Geraden vereinigt werden, so erhält man andere Ortskreise, aber alle diese Ortskreise haben den Punkt $\mathfrak{r}$ zum gemeinschaftlichen Mittelpunkt.

Ist der Projectionspunkt B in irgend einer bestimmten Lage gegeben, so kann die Gerade A_1 nur zwei verschiedene Lagen haben (§ 6, II), wie z. B. in (Fig. 16), wo $\mathfrak{A}_1$ die zweite Lage vorstellt. Die entsprechenden Punktenpaare $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}_1$, die in beiden Fällen in dem Durchschnitte der Geraden vereinigt werden, sind so, dass $\mathfrak{r}\mathfrak{e} = \mathfrak{r}\mathfrak{f}$ und (in A_1) $\mathfrak{q}_1\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{q}_1\mathfrak{f}_1$, weil nämlich B in der Mitte zwischen A_1 und $\mathfrak{A}_1$ liegt (§ 6, II). Daher folgt ferner: »Dass jeder aus dem Mittelpunkt $\mathfrak{r}$ beschriebene Kreis $\mathfrak{r}B\mathfrak{f}$ als

Ortskreis angenommen werden könne, und dass für denselben zwei verschiedene entsprechende Punktenpaare ($\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}_1$, oder $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}_1$) in dem Durchschnitte der Geraden sich vereinigen lassen, und zwar sind diese Punkte jedesmal so, dass die Durchschnitte ($\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_1$) der Parallelstrahlen in der Mitte zwischen denselben liegen.«

Noch sind zwei entsprechende Punktenpaare zu erwähnen, die sich vor allen übrigen auf eigenthümliche Weise unterscheiden. Nach (§ 12, I) ist nämlich das Rechteck unter den Abständen irgend zweier entsprechender Punkte von den Durchschnitten der Parallelstrahlen constant. Nun giebt es zwei solche Punktenpaare, bei welchen das genannte Rechteck ein Quadrat wird. Denn man denke sich ein Quadrat, dessen Inhalt dem constanten Inhalte aller Rechtecke gleich ist, und dessen Seite, auf der Geraden A, durch jeden der [56] zwei Abschnitte $\mathfrak{r}\mathfrak{g}$, $\mathfrak{r}\mathfrak{h}$ dargestellt sei, so müssen nothwendiger Weise auch $\mathfrak{q}_1\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{q}_1\mathfrak{h}_1$ Seiten desselben Quadrats, und also $\mathfrak{r}\mathfrak{g} = \mathfrak{q}_1\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{r}\mathfrak{h} = \mathfrak{q}_1\mathfrak{h}_1$, sein. Werden die Geraden A, A_1 so gelegt, dass eins dieser Punktenpaare $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}_1$ sich in ihrem Durchschnitte befindet, wenn z. B. die Punkte $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}_1$ (Fig. 7) eins dieser Paare vertreten, so ist das Parallelogramm $B\mathfrak{r}(\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1)\mathfrak{q}_1$ eine Raute, und der Strahl e hälftet den von den Geraden eingeschlossenen Winkel. Und auch umgekehrt.

II. Bringt man, während der Strahlbüschel B fest bleibt, den Strahlbüschel B_1 so in andere Lage, dass nacheinander immer andere entsprechende Strahlen auf einander fallen, so erhält der perspectivische Durchschnitt A offenbar andere Richtung, und zwar wird er jede mögliche Richtung in der Ebene erhalten können. Denn wird der perspectivische Durchschnitt A in irgend einer bestimmten Lage angenommen, wie etwa in (Fig. 10), so kann der Strahlbüschel B_1, zufolge (§ 6, II), auf zwei verschiedene Arten so gelegt werden, dass er mit ihm und mit dem festen Strahlbüschel B perspectivisch ist, und zwar werden das eine Mal zwei entsprechende Strahlen e, e_1, wie in der Figur, und das andere Mal irgend zwei andere entsprechende Strahlen, etwa f, f_1, auf einander fallen. Stellt $\mathfrak{B}_1$ die zweite Lage des Mittelpunktes B_1 dar, so steht A auf dem Abschnitte $B_1\mathfrak{B}_1$ rechtwinklig und hälftet ihn (§ 14, II), daher liegt $\mathfrak{B}_1$ ebenfalls in der Kreislinie $\mathfrak{t}BB_1\mathfrak{s}$, die $\mathfrak{m}$ zum Mittelpunkt hat, und daher werden die von den Strahlen e und f eingeschlossenen Winkel durch die Strahlen s und t gehälftet; und eben so werden im Strahlbüschel B_1 die von den Strahlen e_1 und f_1 eingeschlossenen Winkel durch die Strahlen s_1 und t_1 gehälftet. Daher folgt: »Dass es für jede gegebene [57] Richtung des perspectivischen Durchschnittes (A) zwei entsprechende Strahlenpaare (e und e_1, oder f und f_1) giebt, wovon das eine oder das andere aufeinander fallen kann; und zwar liegen diese Strahlen so, dass die von ihnen eingeschlossenen Winkel durch die Schenkel (s, t, s_1, t_1) der entsprechenden rechten Winkel gehälftet werden.«

Aehnlicherweise, wie vorhin (I), sind hier noch zwei entsprechende Strahlenpaare zu erwähnen, denen ein eigenthümliches Merkmal zukommt. Da nämlich das Produkt aus den Tangenten der Winkel, welche irgend zwei entsprechende Strahlen mit den ungleichnamigen Schenkeln der entsprechenden rechten Winkel einschliessen, für alle Strahlenpaare einerlei Werth hat (§ 12, I), so wird, wenn die eine Tangente die Quadratwurzel aus diesem Werthe ist, nothwendiger Weise die andere Tangente ihr gleich sein, und alsdann werden auch die zugehörigen Winkel einander gleich sein. Es sei z. B. (gt) (Fig. 17) ein solcher Winkel, so wird er dem Winkel $(g_1 s_1)$ gleich sein, und wenn er auf der anderen Seite an t liegt, d. h., wenn $(ht) = (gt)$, so ist auch $(h_1 s_1) = (ht)$, mithin $(gt) = (g_1 s_1) = (ht) = (h_1 s_1)$. Dann ist folglich auch zugleich $(gs) = (g_1 t_1) = (hs) = (h_1 t_1)$. Vermöge dieser Eigenschaft der entsprechenden Strahlenpaare g und g_1, h und h_1 folgt, dass, wenn die Strahlbüschel B, B_1 so gelegt werden, dass die zwei Strahlen eines dieser zwei Strahlenpaare aufeinander fallen, der perspectivische Durchschnitt A mit den vereinigten Strahlen (also mit BB_1) parallel wird. Und auch umgekehrt.

16. Bevor die Eigenschaften, die von der schiefen Lage projectivischer Geraden und projectivischer Strahlbüschel herrühren, untersucht werden, sollen erst [58] besondere Fälle, wobei weder das Merkmal der perspectivischen noch der schiefen Lage klar hervortritt, betrachtet werden, nämlich diejenigen Fälle, wo zwei projectivische Gerade aufeinander gelegt und wo die Mittelpunkte zweier projectivischer Strahlbüschel vereinigt werden. Diese Fälle sind von grosser Wichtigkeit, und werden in einem späteren Hefte (im vierten) einer

Reihe der interessantesten Resultate zur Grundlage dienen. In dem vorhergehenden (§ 15) ist der ganze Spielraum in Hinsicht der perspectivischen Lage zweier Geraden und zweier Strahlbüschel gezeigt worden, nur die genannten Grenzfälle sind dabei unberücksichtigt geblieben.

Zunächst entsteht die Frage:

»*Ob bei zwei beliebig aufeinander gelegten projectivischen Geraden A, A_1 entsprechende Punkte zusammen fallen, und wieviel Paare zusammen fallen?*«

»*Ob bei zwei beliebig aufeinander gelegten projectivischen Strahlbüscheln B, B_1 entsprechende Strahlen zusammen fallen, und wieviel Paare zusammen fallen?*«

Es lässt sich zum Voraus behaupten, dass weder bei den Geraden A, A_1, noch bei den Strahlbüscheln B, B_1 drei Paar entsprechende Elemente zusammen fallen können, weil durch drei solche Paare alle übrigen bestimmt sind (§ 11, β), und folglich die Gebilde nothwendiger Weise gleich sein müssten (§ 13, I, b), so dass alsdann je zwei entsprechende Elemente zusammen fielen. Also können im Allgemeinen nicht mehr als zwei Paar entsprechende Elemente zusammen fallen. Diese Behauptung bestätigt sich auf folgende Weise, wenn man von der perspectivischen Lage der Gebilde ausgeht, und sie in die hier zu untersuchenden Grenzfälle übergehen lässt.

[59] I. Wird die Gerade A_1 (Fig. 16), unter den oben angegebenen Bedingungen (§ 15), so lange um den Durchschnitt ($\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1$) bewegt, bis sie auf die feste Gerade A fällt, welches, wie man sieht, auf zwei Arten geschehen kann, entweder so, dass $\mathfrak{e}_1\mathfrak{f}_1$ auf $\mathfrak{e}\mathfrak{f}$, oder dass $\mathfrak{e}_1\mathfrak{l}_1$ auf $\mathfrak{e}\mathfrak{l}$ fällt, so werden ausser den schon vereinigten entsprechenden Punkten $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}_1$, in jedem Falle nur ein einziges Paar entsprechende Punkte zusammen fallen, und zwar, wenn $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{l}$ die Punkte sind, in welchen der Ortskreis von B die Gerade A schneidet, so werden im ersten Falle nur die entsprechenden Punkte $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}_1$ und im anderen Falle nur die entsprechenden Punkte $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{l}_1$ zusammen fallen, weil offenbar nur jeder von den zwei Strahlen k, l mit den Geraden A, A_1 ein gleichschenkliges Dreieck, dessen gleiche Seiten in diesen Geraden liegen, bilden kann. Der Projectionspunkt B fällt also das eine Mal mit $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}_1$, und das andere Mal mit $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}_1$ zusammen. Daher folgt:

»Dass, wenn zwei projectivische Gerade A, A_1 aufeinander liegen, und wenn zwei Paar entsprechende

Punkte ($\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{k}_1$, oder $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}_1$) vereinigt sind, sie als perspectivisch anzusehen sind, und zwar ist das eine Punktenpaar (welches man will) als Durchschnitt der Geraden und das andere als Projectionspunkt (B) anzusehen.«

Wird andererseits das Strahlbüschel B_1, unter den oben angegebenen Bedingungen (§ 15), so lange bewegt, bis sein Mittelpunkt mit dem Mittelpunkte des festen Strahlbüschels B sich vereinigt, so werden, ausser den schon anfänglich vereinigten entsprechenden Strahlen e, e_1, nur ein einziges Paar entsprechende Strahlen aufeinander fallen, nämlich, wie leicht zu sehen, nur die Parallelstrahlen q, q_1, und zwar [**60**] vereinigt sich gleichzeitig auch der perspectivische Durchschnitt A mit diesem Strahlenpaare. Daher folgt:

»Dass, wenn die Mittelpunkte zweier projectivischen Strahlbüschel B, B_1 vereinigt sind, und wenn zwei Paar entsprechende Strahlen (e und e_1, q und q_1) aufeinander liegen, sie als perspectivisch anzusehen sind, und zwar ist das eine Strahlenpaar (gleichviel welches) als der perspectivische Durchschnitt (A) zu betrachten.«

II. Um die vorgelegte Aufgabe nach ihrem ganzen Umfange zu lösen, mag folgende Betrachtung dienen, die alle Umstände klar vor Augen stellt.

Bei zwei projectivischen Geraden A, A_1 findet in Hinsicht der Aufeinanderfolge ihrer entsprechenden Punkte folgende Beziehung statt.

Befinden sich die Geraden in perspectivischer Lage, wie etwa in (Fig. 16), und man lässt in der Vorstellung einen Projectionsstrahl sich um den Projectionspunkt B bewegen, z. B. fängt man mit der Lage von h an und bewegt ihn linksherum, so dass er nacheinander in die Lage von k, q, l, g, r, f, h gelangt, so sieht man, dass von den zugehörigen entsprechenden Punkten $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}_1$ der eine, in der Geraden A, sich von $\mathfrak{h}$ über $\mathfrak{k}$ hinaus nach dem unendlich entfernten Punkte $\mathfrak{q}$ bewegt, von da auf der entgegengesetzten Seite über $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{e}$ bis $\mathfrak{r}$ rückt, und von da über $\mathfrak{f}$ endlich nach $\mathfrak{h}$ zurückkehrt — während der andere, in der Geraden A_1, sich von $\mathfrak{h}_1$ über $\mathfrak{k}_1$ bis $\mathfrak{q}_1$ bewegt, von da über $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{e}_1$ hinaus nach dem unendlich entfernten Punkte $\mathfrak{r}_1$ fortrückt, und von da auf der entgegengesetzten Seite über $\mathfrak{f}_1$ endlich nach $\mathfrak{h}_1$ zurückkehrt. Sowohl der eine als der andere Punkt bewegt sich demnach stets nach der nämlichen Richtung hin; würde sich der erstere nach [61] der umgekehrten Richtung bewegen, so würde der andere ein Gleiches thun.

Werden nun die Geraden beliebig aufeinander gelegt, so können dabei nur folgende zwei wesentlich verschiedene Fälle stattfinden, nämlich die Geraden sind in Hinsicht der Aufeinanderfolge der entsprechenden Punkte, oder in Hinsicht der Richtungen, nach welchen sich, wie man eben gesehen hat, die Punkte bewegen, entweder:

a) gleichliegend, d. h., ihre entsprechenden Punkte folgen einander nach einerlei Richtung hin, so dass, wenn ein Punkt in der Geraden A sich von rechts nach links bewegt, dann sein entsprechender in der Geraden A_1 sich ebenfalls von rechts nach links bewegt, wie z. B. in (Fig. 19), oder:

b) ungleichliegend, d. h., ihre entsprechenden Punkte folgen einander nach entgegengesetzten Richtungen hin, so dass, wenn ein Punkt in A sich von rechts nach links bewegt, dann sein entsprechender in A_1 sich von links nach rechts bewegt, wie z. B. in (Fig. 18).

Da die Geraden durch die Punkte $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_1$ (Durchschnitte der Parallelstrahlen (§ 9, I)), deren entsprechende $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{q}$ unendlich entfernt sind, jede in zwei unendliche Theile getheilt wird, welche einander paarweise entsprechen, nämlich sowohl die Theile $\mathfrak{r}\mathfrak{h}\mathfrak{k}\ldots\ldots\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}_1\mathfrak{k}_1\mathfrak{h}_1\ldots\ldots\mathfrak{r}_1$, als $\mathfrak{r}\mathfrak{g}\mathfrak{l}\ldots\ldots\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}_1\mathfrak{l}_1\mathfrak{g}_1\ldots\ldots\mathfrak{r}_1$ entsprechen einander und enthalten entsprechende Punkte, so dass jedem Punkt im einen Theile ein Punkt im anderen Theile entspricht, so ist klar, dass im Falle (b) längs der Strecke $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ keine entsprechenden Punkte zusammentreffen können, weil, wenn die mit $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_1$ vereinigten Punkte etwa $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{m}$ heissen, offenbar die den Punkten von $\mathfrak{r}$ bis $\mathfrak{m}$ entsprechenden Punkte jenseits $\mathfrak{m}_1$ [62] liegen, und eben so die den Punkten von $\mathfrak{q}_1$ bis $\mathfrak{n}_1$ entsprechenden Punkte sämmtlich jenseits $\mathfrak{n}$ liegen. Daher können nur in den Strecken von $\mathfrak{r}$ bis $\mathfrak{n}$ und von $\mathfrak{q}_1$ bis $\mathfrak{m}_1$ entsprechende Punkte zusammen fallen. Dass in der That in jeder dieser Strecken allemal ein, und nur ein Paar entsprechender Punkte sich treffen, ist leicht zu sehen, denn während z. B. ein Punkt in A von $\mathfrak{r}$ über $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}\ldots.$ hinaus bis ins Unendliche fortrückt, kommt sein entsprechender in A_1 von da her über $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{k}_1\ldots.$ nach $\mathfrak{q}_1$, so dass nothwendiger Weise beide Punkte irgend wo, etwa in $(\mathfrak{f}\mathfrak{f}_1)$, sich begegnen müssen. Oder dasselbe ist auch eine leichte Folge des obigen Ausdruckes (§ 12, I, β), wonach das Rechteck unter den Abständen zweier entsprechender Punkte von den Punkten $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_1$ einen beständigen Inhalt hat. Denn bestimmt man in beiden Strecken zwei Punkte, etwa $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, so, dass die Rechtecke $\mathfrak{r}\mathfrak{e} \cdot \mathfrak{q}_1\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{r}\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{q}_1\mathfrak{f}$ den genannten constanten Inhalt haben, welches allemal, aber nur auf eine Art, möglich ist, so sind nothwendiger Weise $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{f}$ diejenigen beiden Punkte, welche allein sich mit ihren entsprechenden $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{f}_1$ vereinigen.

Im anderen Falle (a) sieht man, dass weder in dem Theile $\mathfrak{r}\mathfrak{h}\mathfrak{f}\ldots\mathfrak{q}$ noch in dem Theile $\mathfrak{q}_1\mathfrak{f}_1\mathfrak{h}_1\ldots\mathfrak{r}_1$ entsprechende Punkte sich vereinigen können, weil eben diese zwei Theile entsprechend sind und entsprechende Punkte enthalten. Dagegen sind $\mathfrak{r}\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{q}_1\mathfrak{n}_1$ Abschnitte entsprechender Theile, so dass also von $\mathfrak{r}$ bis $\mathfrak{q}_1$ möglicher Weise entsprechende Punkte sich treffen können. Diese Möglichkeit hängt davon ab, ob die Strecke $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ so getheilt werden kann, dass das Rechteck unter den Abschnitten einen bestimmten gegebenen Inhalt habe; nämlich wenn $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}_1$ die ihnen oben (§ 15, I) beigelegte Eigenschaft haben, [63] wonach $\mathfrak{r}\mathfrak{g} = \mathfrak{q}_1\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{r}\mathfrak{h} = \mathfrak{q}_1\mathfrak{h}_1$, so ist der genannte Inhalt $= \mathfrak{r}\mathfrak{g}^2 = \mathfrak{q}_1\mathfrak{g}_1{}^2$ u. s. w. Wenn demnach die Strecke $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ grösser ist als $\mathfrak{r}\mathfrak{g} + \mathfrak{q}_1\mathfrak{g}_1$, oder $\mathfrak{r}\mathfrak{h} + \mathfrak{q}_1\mathfrak{h}_1$, so treffen allemal zwei Paar entsprechender Punkte zusammen, wie vorhin; ist die Strecke $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ gerade gleich $\mathfrak{r}\mathfrak{g} + \mathfrak{q}_1\mathfrak{g}_1$, oder gleich $\mathfrak{r}\mathfrak{h} + \mathfrak{q}_1\mathfrak{h}_1$, so treffen nur ein Paar entsprechender Punkte zusammen, und zwar entweder die entsprechenden Punkte $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}_1$, oder $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}_1$; und wenn endlich die Strecke $\mathfrak{r}\mathfrak{q}_1$ kleiner ist als $\mathfrak{r}\mathfrak{g} + \mathfrak{q}_1\mathfrak{g}_1$, oder $2\mathfrak{r}\mathfrak{g}$, welches z. B. in (Fig. 19) der Fall ist, so ist gar kein Zusammentreffen von entsprechenden Punkten möglich. Also kann, wenn die Gerade A fest bleibt, die Gerade A_1 um eine Strecke von $4\mathfrak{r}\mathfrak{g}$ hin und her bewegt werden, ohne dass entsprechende Punkte zusammentreffen; nämlich die Grenzen dieses Spielraums gestatten, dass sie sich nach links bewegen darf bis $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}_1$, und nach rechts bis $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}_1$ zusammentreffen; in jeder dieser Grenzen trifft ein einziges Paar entsprechender Punkte zusammen, nämlich die eben genannten; werden aber diese Grenzen überschritten, so treffen immer zwei Paar zusammen.

Andererseits findet man bei zwei projectivischen Strahlbüscheln B, B_1 durch eine ähnliche Betrachtung ganz entsprechende Resultate. Werden die Strahlbüschel concentrisch gelegt, so können in Hinsicht der Aufeinanderfolge der entsprechenden Strahlen folgende zwei wesentlich verschiedene Fälle stattfinden, nämlich die Strahlbüschel sind entweder:

α) gleichliegend, d. h., ihre entsprechenden Strahlen folgen einander nach einerlei Ordnung, so dass, wenn man einen Strahl h des Strahlbüschels B sich rechtsherum bewegen lässt (vom Mittelpunkt B aus betrachtet), dann sein entsprechender [64] h_1 im Strahlbüschel B_1 sich ebenfalls rechtsherum bewegt (§ 13, II), wie z. B. in (Fig. 20); oder:

β) ungleichliegend, d. h., ihre entsprechenden Strahlen folgen in ungleicher oder verkehrter Ordnung aufeinander, so dass, wenn Strahlen in einem Strahlbüschel rechtsherum sich folgen, dann ihre entsprechenden im anderen Strahlbüschel linksherum nach einander folgen, wie z. B. in (Fig. 21).*)

Vermöge der entsprechenden rechten Winkel (st), $(s_1 t_1)$ (§ 9, II), und durch Hülfe der obigen Ausdrücke (§ 12, γ, δ) und mit Rücksicht auf die besondere Eigenschaft der Strahlen g, g_1, h, h_1 (§ 15, II), kann man, auf ähnliche Art, wie vorhin, bei den Geraden A, A_1, auch für die gegenwärtigen Fälle finden, dass im Falle (α) entweder 1) zwei, oder 2) ein, oder 3) gar kein Paar entsprechende Strahlen aufeinander fallen, und dass dagegen im Falle (β) allemal zwei Paar entsprechende Strahlen aufeinander fallen. Oder diese Resultate können auch aus den vorigen, wie folgt, hergeleitet werden. Schneidet man die concentrischen Strahlbüschel (Fig. 20) oder (Fig. 21) mit irgend einer Geraden, so kann man diese als zwei vereinigte Gerade (AA_1) ansehen, wovon jede eins der beiden Strahlbüschel schneidet, und die also, in Ansehung der Punktenpaare, in welchen sie von entsprechenden Strahlen geschnitten werden, zufolge des Satzes (§ 11, III), [65] projectivisch sind, und zwar ist die Lage der Geraden und der Strahlbüschel allemal übereinstimmend,

---

*) Befinden sich die Strahlbüschel in perspectivischer Lage, so sind sie gleichliegend oder ungleichliegend, je nachdem ihre Mittelpunkte auf einerlei (Fig. 17), oder auf entgegengesetzten (Fig. 5) Seiten des perspectivischen Durchschnittes A liegen; und auch umgekehrt.

d. h., die Geraden (AA_1) sind bei (Fig. 20) gleichliegend und bei (Fig. 21) ungleichliegend, und da nun, wenn in den Geraden entsprechende Punkte zusammenfallen, nothwendiger Weise auch die zugehörigen Strahlen der Strahlbüschel aufeinander fallen, und auch umgekehrt, so folgen also daraus, wie gesagt, die genannten Resultate.

Also folgen aus dieser Betrachtung zusammengenommen nachstehende Sätze:

»*Werden zwei projectivische Gerade A, A_1 beliebig aufeinander gelegt, so vereinigen sich im Allgemeinen zwei Paar entsprechender Punkte, nämlich:* a) *Wenn die Geraden gleichliegend sind, so giebt es einen bestimmten Spielraum, innerhalb dessen keine entsprechenden Punkte sich treffen, an beiden Grenzen dieses Raumes vereinigt sich nur ein Paar* ($\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}_1$ oder $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}_1$), *und über diese Grenzen hinaus vereinigen sich allemal zwei Paar entsprechender Punkte;* und b) *wenn die Geraden ungleichliegend sind, so treffen allemal zwei Paar entsprechender Punkte zusammen.*«

»*Wenn zwei projectivische Strahlbüschel B, B_1 beliebig concentrisch gelegt werden, so fallen im Allgemeinen zwei Paar entsprechender Strahlen aufeinander, nämlich:* a) *Wenn die Strahlbüschel gleichliegend sind, so giebt es einen bestimmten Spielraum, innerhalb dessen keine entsprechenden Strahlen sich treffen, an beiden Grenzen dieses Raumes vereinigt sich nur ein Paar* (g und g_1, oder h und h_1), *und über diese Grenzen hinaus vereinigen sich allemal zwei Paar entsprechender Strahlen;* und b) *wenn die Strahlbüschel ungleichliegend sind, so fallen allemal zwei Paar entsprechender Strahlen aufeinander.*«

III. Für ähnliche oder gleiche projectivische Gerade, und für gleiche projectivische Strahlbüschel werden die vorstehenden Sätze (II) insbesondere wie folgt beschränkt.

[66] »Werden zwei projectivisch ähnliche Gerade A, A_1 beliebig aufeinander gelegt, gleichliegend, oder ungleichliegend, so vereinigen sich allemal zwei Paar entsprechender Punkte, wovon das eine Paar namentlich die unendlich entfernten Punkte sind (§ 13, I, a).«

»*Werden zwei projectivisch gleiche Gerade gleichliegend aufeinander gelegt, so treffen sich entweder nur ein Paar entsprechender Punkte, nämlich die unendlich entfernten, oder es treffen sich je zwei entsprechende Punkte.*«

»*Werden zwei projectivisch gleiche Strahlbüschel B, B_1 gleichliegend concentrisch gelegt, so fallen entweder gar keine entsprechenden Strahlen aufeinander, oder es fallen je zwei entsprechende Strahlen aufeinander.*«

»*Werden zwei projectivisch gleiche Gerade ungleichliegend aufeinander gelegt, so treffen sich allemal zwei Paar entsprechender Punkte, wovon das eine Paar namentlich die unendlich entfernten Punkte sind* (§ 13, I, b).«

»*Werden zwei projectivisch gleiche Strahlbüschel ungleichliegend aufeinander gelegt, so fallen allemal zwei Paar entsprechender Strahlen aufeinander, nämlich die Schenkel zweier entsprechenden rechten Winkel* (§ 13, II).«

IV. Aus den obigen Sätzen (II) folgert man leicht den nachstehenden Satz:

»Wenn zwei projectivische Gebilde A, B, d. h. eine Gerade und ein ebener Strahlbüschel, sich in schiefer Lage befinden (Fig. 2), so treffen im Allgemeinen zwei Paar entsprechender Elemente zusammen, d. h., es gehen zwei Strahlen des Strahlbüschels durch die ihnen entsprechenden Punkte der Geraden; nämlich wenn die Gebilde ungleichliegend sind, so findet dieses allemal statt; wenn sie dagegen gleichliegend sind, so treffen entweder 1) zwei, [**67**] oder 2) nur ein, oder 3) gar kein Paar entsprechender Elemente zusammen.«

17. An die vorhin gefundenen Resultate (§ 16) schliessen sich nachstehende Aufgaben an, für welche eine zweckmässige Lösung um so wünschenswerther ist, als in der Folge verschiedene andere Aufgaben sich auf dieselben zurückbringen lassen.

»*Bei zwei aufeinander liegenden projectivischen Geraden A, A_1 die vereinigten entsprechenden Punkte zu finden.*«

»*Bei zwei concentrischen projectivischen Strahlbüscheln B, B_1 die vereinigten entsprechenden Strahlen zu finden.*«

Auflösung. I. Die bisher entwickelten Eigenschaften geben zur Lösung der Aufgaben folgende Mittel an die Hand.

a) Damit die projectivische Beziehung der Geraden A, A_1 bestimmt sei, müssen wenigstens drei entsprechende Punktenpaare gegeben sein (§ 10, β). Es seien etwa $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ (Fig. 22) gegeben. Man suche zuvörderst die Durchschnitte $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_1$ der Parallelstrahlen, und zwar dadurch, dass man die Geraden perspectivisch legt, nämlich sie so legt, dass sie einander schneiden, und dass eins der drei entsprechenden Punktenpaare, etwa $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}_1$, in ihrem Durchschnitte vereinigt sind; d. h., man zieht durch $\mathfrak{c}$ eine beliebige dritte Gerade A^1, nimmt darin, ausser dem mit $\mathfrak{c}$ vereinigten Punkte $\mathfrak{c}^1$, die Punkte $\mathfrak{a}^1$, $\mathfrak{b}^1$ so, dass $\mathfrak{a}^1\mathfrak{c}^1 = \mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{b}^1\mathfrak{c}^1 = \mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{a}^1\mathfrak{b}^1 = \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$, und zieht ferner die Strahlen $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}^1$, die sich in B begegnen, und durch diesen Punkt B zieht man endlich die Parallelstrahlen r, q, so ist $\mathfrak{r}$ der eine, und wenn $\mathfrak{q}_1\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{q}^1\mathfrak{a}^1$, und zwar gleichliegend, genommen wird, so ist $\mathfrak{q}_1$ der andere gesuchte Punkt. Sind die Punkte $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}_1$ gefunden, so ist zur Lösung der Aufgabe nur noch nöthig, [68] in den vereinigten Geraden (AA_1) zwei Punkte $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ zu finden, für welche die Rechtecke $\mathfrak{e}\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{e}\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{f}\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{f}\mathfrak{q}_1$ gegebenen Inhalt, nämlich mit dem gegebenen Rechteck $\mathfrak{a}\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{a}_1\mathfrak{q}_1$ gleichen Inhalt haben, welches eine bekannte elementare Aufgabe ist; denn alsdann sind $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ diejenigen Punkte, die sich mit ihren entsprechenden $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{f}_1$ vereinigen. Nur hat man in Hinsicht der Lage der Punkte $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ ausserdem die oben (§ 16, II) auseinandergesetzten Umstände genau zu berücksichtigen.

b) Auf ganz ähnliche Weise kann man bei den Strahlbüscheln B, B_1 verfahren. Nämlich durch Hülfe eines Strahlbüschels B^1, welches B_1 gleich ist und mit B perspectivisch liegt, sucht man zuerst die entsprechenden rechten Winkel (st), (s_1t_1) u. s. w. Oder man kann diese Aufgabe auf die erste (a) bringen, und zwar dadurch, dass man die vereinigten Strahlbüschel (BB_1) durch irgend eine Gerade schneidet, und diese als zwei vereinigte Gerade (AA_1) betrachtet, eben so, wie schon vorhin (§ 16, II) geschehen ist.

II. Eine andere, viel einfachere Auflösung, deren Richtigkeit jedoch erst später (§ 46, III) bewiesen wird, ist folgende:

a) Man ziehe irgend eine Kreislinie $\alpha\varkappa B$ (Fig. 23), und ziehe aus einem beliebigen Punkte B derselben durch die drei in den vereinigten Geraden (AA_1) gegebenen Punktenpaare $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ die Geraden $B\mathfrak{a}$, $B\mathfrak{b}$, ..., welche die Kreislinie zum zweiten Male in den Punkten α, β, γ und α_1, β_1, γ_1 schneiden, verbinde von diesen Punkten das eine Paar gleichnamiger, etwa α, α_1, wechselseitig mit den beiden anderen Paaren, nämlich so: man ziehe die Geraden $\alpha\beta_1$, $\alpha_1\beta$, die sich in β_2, und die Geraden $\alpha\gamma_1$, $\alpha_1\gamma$, die sich in γ_2 schneiden; ziehe sofort die Gerade $\beta_2\gamma_2$, welche die Kreislinie in den Punkten ε, $\varkappa$ schneidet, und durch [69] diese Punkte ziehe man endlich aus B die Geraden $B\varepsilon$, $B\varkappa$, so werden diese der Geraden (AA_1) in den gesuchten vereinigten entsprechenden Punktenpaaren $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}_1$ begegnen. Sind die Geraden A, A_1 gleichliegend, so wird die Gerade $\beta_2\gamma_2$ den Kreis entweder 1) schneiden, oder 2) berühren, oder 3) gar nicht treffen, je nachdem 1) zwei, oder 2) ein, oder 3) gar kein Paar entsprechender Punkte zusammentreffen (§ 16).

Sobald also irgend ein Kreis (oder überhaupt ein Kegelschnitt), der mit den aufeinander gelegten Geraden (AA_1) in einer Ebene liegt, gegeben ist, so kann die Aufgabe mittelst des Lineals allein gelöst werden. Diese Auflösung wurde hier nicht nur deshalb mitgetheilt, weil sie an und für sich sehr bemerkenswerth ist, sondern weil sie in der Folge noch bei vielen anderen Aufgaben Anwendung findet, und zwar so, dass man dadurch zu Auflösungen gelangt, die vor den bisher bekannten grossen Vorzug verdienen.

b) Auch die andere Aufgabe kann auf ganz entsprechende Weise gelöst werden, d. h., statt eines Punktes B in der Kreislinie wird irgend eine Tangente an derselben angenommen u. s. w. Das Ausführlichere dieser Auflösung wird hier übergangen. Uebrigens ist es einfacher die Aufgabe eben so, wie vorhin (I), auf die erste zu bringen und nach vorstehender Vorschrift (a) zu lösen. Oder wenn der Hülfskreis nicht in bestimmter Lage gegeben ist, sondern wenn es gestattet ist, ihn beliebig zu ziehen, so kann man ihn so ziehen, dass er durch den gemeinschaftlichen Mittelpunkt der Strahlbüschel geht, wie etwa, wenn in dem vorerwähnten Punkte B beide Mittelpunkte B, B_1 vereiniget wären, so würde man alsdann mittelst der entsprechenden Strahlen a, b, c und a_1, b_1, c_1 die vereinigten [70] entsprechenden Strahlen e und e_1, k und k_1, durch das vorige Verfahren (a) finden können, wie leicht zu sehen.

18. Die wichtigsten Eigenschaften, welche bei der schiefen Lage zweier projectivischen Geraden A, A_1 und zweier projectivischen Strahlbüschel B, B_1 statt haben, nämlich das Gesetz, welchem bei den Geraden die Projectionsstrahlen und bei den Strahlbüscheln die Durchschnitte der entsprechenden Strahlen unterworfen sind, können hier noch nicht in ihrem ganzen Umfange erforscht werden; sie sind daher zum Theil dem dritten Kapitel vorbehalten.

Vorläufig sollen nur folgende Sätze und Aufgaben, die sich leicht auf vorangegangene Sätze und Aufgaben bringen lassen, aufgestellt werden.

»Wenn zwei projectivische Gerade A, A_1 sich in schiefer Lage befinden, so gehen durch irgend einen Punkt B im Allgemeinen

»Wenn zwei projectivische Strahlbüschel B, B_1 sich in schiefer Lage befinden, so liegen auf irgend einer Geraden A im Allgemeinen und

und höchstens nur zwei Projectionsstrahlen; also können auch nur höchstens zwei und zwei Projectionsstrahlen parallel sein.«

Denn denkt man sich um den genannten Punkt B zwei Strahlbüschel B, B_1, die mit den gegebenen Geraden perspectivisch sind, so müssen dieselben unter sich projectivisch sein (§ 11), und ihre zwei Paar vereinigten entsprechenden Strahlen (§ 16, II) müssen offenbar die zwei genannten Projectionsstrahlen der Geraden A, A_1 sein.

höchstens nur zwei Durchschnitte entsprechender Strahlen; also können auch nur höchstens zwei Paar entsprechender Strahlen parallel sein.«

Denn denkt man sich zwei Gerade A, A_1, die in der genannten Geraden A aufeinander liegen, und die mit den gegebenen Strahlbüscheln perspectivisch sind, so müssen dieselben unter sich projectivisch sein (§ 11), und ihre zwei Paar vereinigten entsprechenden Punkte (§ 16, II) müssen offenbar Durchschnitte entsprechender Strahlen der Strahlbüschel B, B_1 sein.

[71] Werden nun die Aufgaben gestellt:

»Bei zwei schiefliegenden projectivischen Geraden A, A_1 die (zwei) Projectionsstrahlen zu finden, die durch irgend einen gegebenen Punkt B gehen;«

»Bei zwei schiefliegenden projectivischen Strahlbüscheln B, B_1 diejenigen Durchschnitte entsprechender Strahlen zu finden, die in einer gegebenen Geraden A liegen;«

so ist zufolge des vorstehenden Satzes klar, wie sie nach (§ 17) leicht zu lösen sind.

Welchen Spielraum, wenn die Geraden A, A_1 gegeben sind, der Punkt B hat, damit entweder zwei, oder ein, oder gar kein Projectionsstrahl durch denselben geht, und welchen Spielraum, wenn die Strahlbüschel B, B_1 gegeben sind, die Gerade A hat, damit entweder zwei, oder ein, oder gar kein Durchschnitt von entsprechenden Strahlen in ihr liegt, wird, wie schon erwähnt, durch weitere Entwickelungen im dritten Kapitel klar hervortreten.

Durch eine bald folgende Betrachtung wird gezeigt werden, wie bei der schiefen Lage der beiden Paar Gebilde A und A_1, B und B_1, durch ein sehr einfaches Verfahren, nämlich mittelst des Lineals allein, schief projicirt werden kann, d. h., beliebige entsprechende Elemente gefunden werden können.

Sätze und Porismen, die aus Zusammenstellung der Gebilde entspringen.

19. Nachdem die Eigenschaften und die Fundamentalsätze über projectivische Gerade und Strahlbüschel aufgefunden sind, dürfte es wohl für Viele wünschenswerth sein, an einigen

Beispielen zu sehen, wie sehr umfassend diese Sätze sind, d. h., wie sie die eigentliche Grundlage vieler anderen Sätze sind, die unmittelbar aus ihnen hervorgehen, wie durch sie manche [**72**] anscheinend schwere Aufgaben leicht zu lösen sind, und wie endlich durch sie besonders die eigentliche Bedeutung verschiedener Porismen verständlich hervortritt.

Zu diesem Endzweck sollen zur Erleichterung folgende Erklärungen festgestellt werden.

Seit *Carnot* zuerst auf die Vollständigkeit oder auf das Umfassende der Figuren aufmerksam gemacht, braucht man häufig den Ausdruck »vollständiges Viereck« (*quadrilatère complet*). Man hat aber dabei zwei wesentlich verschiedene Figuren gar nicht von einander unterschieden, was doch bei genauer und vollständiger Betrachtung durchaus nicht ausser Acht gelassen werden darf und kann. Nämlich man hat genau zu unterscheiden a) »vollständiges Vierseit« und b) »vollständiges Viereck«, und zwar unterscheiden sie sich wie folgt:

»*Vollständiges Vierseit*« heissen jede vier Gerade A, B, C, D (Fig. 24) zusammengefasst; die sechs Durchschnitte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ der Seiten heissen *Ecken* desselben; es hat also drei Paar einander gegenüber liegende Ecken, nämlich $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$, und somit hat es drei Diagonalen $\mathfrak{af}$, $\mathfrak{be}$, $\mathfrak{cd}$; und endlich umfasst es drei *einfache Vierseit*, nämlich $\mathfrak{abfea}$, $\mathfrak{acfda}$, $\mathfrak{bcedb}$.

»*Vollständiges Viereck*« heissen jede vier Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ (Fig. 25) zusammengefasst; die sechs Geraden, welche durch die Punkte bestimmt werden, heissen Seiten desselben; es hat also drei Paar einander gegenüber liegende Seiten, nämlich $\mathfrak{ab}$ und $\mathfrak{cd}$, $\mathfrak{ac}$ und $\mathfrak{bd}$, $\mathfrak{ad}$ und $\mathfrak{bc}$, und somit drei Durchschnitte $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ gegenüber liegender Seiten; und endlich umfasst es drei *einfache Vierecke*, nämlich $\mathfrak{abcda}$, $\mathfrak{acdba}$, $\mathfrak{acbda}$.

Ein einfaches Viereck ist auch zugleich ein einfaches Vierseit, so dass also derselben Figur der eine oder der andere von diesen zwei Namen beigelegt werden kann. Dasselbe gilt vom einfachen Fünfeck und Fünfseit, u. s. w. Ein vollständiges Fünfeck aber, so wie ein vollständiges Fünfseit [**73**] besteht aus 12 einfachen Fünfecken oder Fünfseiten; und sowohl das vollständige Sechseck, als Sechsseit besteht, wie ich schon bei einer anderen Gelegenheit (*Annales de mathem.* Tom. XVIII.) angegeben habe, aus 60 einfachen Sechsecken oder Sechsseiten. Nämlich, wenn man die obigen Erklärungen weiter ausdehnt, so lauten sie im Allgemeinen, und wie *Carnot* zum Theil schon angegeben hat, wie folgt:

»*Vollständiges n Seit* heissen jede n Gerade in einer Ebene zusammengefasst; die $\frac{n(n-1)}{2}$ Durchschnitte der Seiten (Geraden) heissen *Ecken* desselben; es besteht aus $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots . (n-1)}{2}$ einfachen n *Seiten* oder n *Ecken*.«

»*Vollständiges n Eck* heissen jede n Punkte in einer Ebene zusammengefasst; die $\frac{n(n-1)}{2}$ Geraden, die durch die Ecken (Punkte) bestimmt werden, heissen *Seiten* desselben; es besteht aus $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots . (n-1)}{2}$ einfachen n *Ecken* oder n *Seiten*.«

Ein einfaches n Eck entsteht nämlich, wenn man n Punkte, nach irgend einer Ordnung genommen, in einem Zuge durch n maliges Absetzen verbindet, so jedoch, dass man bei jedem Punkte einmal anhält, und zuletzt wieder in den Anfangspunkt zurückkehrt. Danach wird man sich leicht von der Richtigkeit der in den vorstehenden Erklärungen angegebenen Zahlen überzeugen können (s. § 25, Note).

20. Es sei a, b, a_1, b_1 (Fig. 26) ein beliebiges vollständiges Vierseit, dessen drei Diagonalen $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}$ (§ 19) sich in $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ schneiden. Man denke sich zu den drei Strahlen a, b, c den vierten, dem c zugeordneten, harmonischen Strahl d, und eben so zu den drei Strahlen a_1, b_1, c_1 den, dem c_1 zugeordneten, vierten harmonischen Strahl d_1, so müssen, zufolge früherer Sätze, beide Strahlen d und d_1 die Gerade $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1\mathfrak{C}$ in demjenigen Punkte $\mathfrak{D}$ schneiden, der zu den drei [74] Durchschnitten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{C}$ der vierte, dem $\mathfrak{C}$ zugeordnete harmonische Punkt ist; und eben so müssen beide Strahlen d, d_1 durch denjenigen Punkt $\mathfrak{D}$ der Geraden $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}\mathfrak{E}$ gehen, der zu den drei Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{E}$ der vierte, und zwar dem $\mathfrak{E}$ zugeordnete, harmonische Punkt ist; da aber beide Strahlen d, d_1 nur einen einzigen Punkt $\mathfrak{D}$ gemein haben können, so muss dieser zugleich der Durchschnitt der beiden Geraden $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1\mathfrak{C}$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}\mathfrak{E}$ sein, und folglich schneiden die Diagonalen einander so, dass die zwei Durchschnitte $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ in den Diagonalen $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}$ zu den zugehörigen Ecken $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}$ zugeordnete harmonische Punkte sind. Auf gleiche Weise folgt, dass auch $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{E}$ zu den Ecken $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ zugeordnete harmonische Punkte sind; oder dieses folgt auch daraus, dass vermöge der harmonischen Strahlen a, d, b, c die Punkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{B}$, und vermöge dieser die Strahlen $\mathfrak{D}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{D}\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{D}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{D}\mathfrak{B}$, und vermöge dieser endlich die Punkte $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}$ harmonisch sind.

Da die vier Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$ ein beliebiges vollständiges Viereck darstellen, dessen gegenüber liegende Seitenpaare sich in $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$ schneiden, und wo diese Durchschnitte durch die Strahlen c (oder c_1), d, d_1 verbunden sind, so ist durch die vorstehende Betrachtung auch zugleich dargethan, dass bei einem solchen Viereck die Strahlen, welche die Durchschnitte der gegenüber liegenden Seiten verbinden, zu den letzteren zugeordnete harmonische Strahlen sind, dass nämlich die Strahlen d, c zu den Seiten a, b (oder $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$), die Strahlen c_1, d_1 zu den Seiten a_1, b_1, und die Strahlen d, d_1 zu den Seiten $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}$ zugeordnete harmonische Strahlen sind.

Aus dieser Betrachtung folgt nachstehende Reihe von Sätzen und Aufgaben.

[75] I. »*Im vollständigen Vierseit sind die Punkte, in welchen die drei Diagonalen einander schneiden, zu den zugehörigen Ecken zugeordnete harmonische Punkte.*«

[75] I. »*Im vollständigen Viereck sind die Strahlen, welche die Durchschnitte der gegenüber liegenden Seitenpaare verbinden, zu den letzteren zugeordnete harmonische Strahlen.*«

Der Satz links wurde vornehmlich durch *Carnot* allgemeiner bekannt, ungeachtet man denselben schon in *Pappus* Collect. Mathem. libr. VII. findet.

II. »*Zu drei gegebenen Punkten den vierten harmonischen Punkt zu finden, jedoch nur mittelst des Lineals allein.*«

Sind etwa $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{C}$ gegeben und man will den, dem $\mathfrak{C}$ zugeordneten, vierten harmonischen Punkt $\mathfrak{D}$ finden, so ziehe man durch $\mathfrak{C}$ irgend eine Gerade $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, nehme darin zwei willkürliche Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, verbinde diese mit den zwei übrigen gegebenen Punkten durch Gerade $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{B}\mathfrak{a}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{b}_1$, die sich in $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}$ schneiden, so wird die Gerade $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}$ durch den gesuchten Punkt $\mathfrak{D}$ gehen.

II. »*Zu drei gegebenen Strahlen den vierten harmonischen Strahl zu finden, jedoch nur mittelst des Lineals allein.*«

Sind etwa a, b, c gegeben und man will den, dem c zugeordneten, vierten harmonischen Strahl d finden, so nehme man in c irgend einen Punkt $\mathfrak{B}$, ziehe durch diesen willkürlich zwei Gerade $\mathfrak{B}\mathfrak{a}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{a}_1$, die den Strahlen a, b in den Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$ begegnen, verbinde diese durch die Geraden $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{a}_1$, die sich in dem Punkte $\mathfrak{D}$ schneiden, so wird die Gerade $\mathfrak{A}\mathfrak{D}$ der verlangte Strahl sein.

Die Aufgabe links wurde zuerst von *De Lahire* (Sectiones conicae. 1685) auf diese nämliche Art gelöst.

III. »*Wenn drei Gerade und ein Punkt gegeben sind, so soll, mittelst des Lineals allein, durch den Punkt eine Gerade so gezogen werden, dass er und die drei Durchschnitte, welche sie mit den drei Geraden macht, vier harmonische Punkte sind.*«

[76] Sind etwa a_1, b_1, b und $\mathfrak{D}$ gegeben, so ziehe man z. B. die Gerade $\mathfrak{DB}$ oder d_1, suche zu den drei Strahlen a_1, b_1, d_1 den vierten, dem d_1 zugeordneten, harmonischen Strahl c_1 (II), der der dritten Geraden b in $\mathfrak{A}$ begegnet, so wird die Gerade $\mathfrak{AD}$ der Aufgabe genügen, d. h., die vier Punkte $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{A}$ sind harmonisch. Zwei andere Gerade, welche ebenfalls der Aufgabe genügen, findet man auf ähnliche Weise.

III. »*Wenn drei Punkte und eine Gerade gegeben sind, so soll, mittelst des Lineals allein, in der Geraden ein Punkt gefunden werden, dass sie und die drei Geraden, welche er mit den drei Punkten bestimmt, vier harmonische Strahlen sind.*«

[76] Sind etwa $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$ und b gegeben, so ziehe man z. B. die Gerade $\mathfrak{aB}$, suche zu den drei Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{B}$ den vierten, dem $\mathfrak{B}$ zugeordneten, harmonischen Punkt $\mathfrak{d}$ (II), ziehe die Gerade $\mathfrak{dD}$, so wird diese der gegebenen Geraden b in einem Punkt $\mathfrak{A}$ begegnen, welcher der Aufgabe genügt, so dass a, d, b, c harmonisch sind. Zwei andere Punkte, die auch der Aufgabe genügen, findet man auf ähnliche Weise.

Wird $\mathfrak{A}$ als Projectionspunkt der Geraden a_1, b_1 angesehen, so dass $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}, \ldots$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1, \ldots$ entsprechende Punkte sind, und wird $\mathfrak{CD}$ als perspectivischer Durchschnitt der Strahlbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ angenommen, so dass a, d, b, $c, \ldots$ und a_1, d_1, b_1, $c_1, \ldots$ entsprechende Strahlen sind, so folgt ferner:

IV. »*Wenn man bei zwei perspectivischen Geraden a_1, b_1 je zwei entsprechende Punktenpaare wechselseitig* ($\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ mit $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}$, oder mit $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}$, u. s. w.) *durch Gerade* ($\mathfrak{ab}_1$ und $\mathfrak{ba}_1$, $\mathfrak{ad}_1$ und $\mathfrak{da}_1, \ldots$) *verbindet, so liegen die Durchschnitte $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_1, \ldots$ aller dieser Paar Geraden in einer bestimmten Geraden d_1, die nämlich zu den perspectivischen Geraden a_1, b_1 und zu dem durch ihren Durchschnitt $\mathfrak{B}$ gehenden Projectionsstrahle c oder c_1 der vierte, dem c_1 zugeordnete, harmonische Strahl ist.*«

IV. »*Wenn man bei zwei perspectivischen Strahlbüscheln $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ je zwei entsprechende Strahlenpaare sich wechselseitig schneiden lässt* (a, a_1 mit b_1, b, oder mit d_1, d, u. s. w.), *und die Durchschnitte* ($\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{d}, \ldots$) *durch Gerade $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}$, $\mathfrak{ed}, \ldots$ verbindet, so gehen diese alle durch einen bestimmten Punkt $\mathfrak{C}$, der nämlich zu den Mittelpunkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ der Strahlbüschel und zu demjenigen Punkte $\mathfrak{C}$, in welchem ihr gemeinschaftlicher Strahl* ($c\,c_1$) *vom perspectivischen Durchschnitte $\mathfrak{DC}$ getroffen wird, der vierte, dem $\mathfrak{C}$ zugeordnete, harmonische Punkt ist.*«

[77] Der Satz links ist (mit anderen Worten ausgesprochen) allgemein bekannt. Es ist leicht zu sehen, wie vermöge dieser Sätze die folgenden Aufgaben:

V. »*Durch einen gegebenen Punkt $\mathfrak{D}$ eine Gerade $\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1$ zu ziehen, welche durch den Durchschnitt $\mathfrak{B}$ zweier gegebenen Geraden $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ geht, im Falle dieser Durchschnitt unzugänglich ist.*«

V. »*In einer gegebenen Geraden $\mathfrak{D}\mathfrak{E}$ denjenigen Punkt $\mathfrak{E}$ zu finden, welcher mit zwei gegebenen Punkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ in einer Geraden liegt, im Falle diese Gerade nicht gezogen werden kann.*«

wovon die eine, links, ebenfalls allgemein bekannt ist, mittelst des Lineals allein zu lösen sind.

Weiter unten wird man finden, dass die Sätze (IV) nur besondere Fälle von allgemeineren Sätzen sind, die nämlich stattfinden, wenn die projectivischen Gebilde a_1, b_1 und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ sich in schiefer Lage befinden.

Es liessen sich hier noch eine Menge Folgerungen ziehen, die namentlich das Dreieck, die Theorie der Transversalen, u. s. w. betreffen, bei denen ich mich aber nicht aufhalten kann.

21. Sind drei Gerade A, A_1, A_2 (Fig. 27) unter einander projectivisch, nämlich in Ansehung der Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}, \ldots$; $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1, \ldots$; $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_2, \ldots$, und liegen sie so, dass sie einander in einem Punkte schneiden, und dass in demselben drei entsprechende Punkte $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ vereinigt sind, und dass mithin je zwei Gerade perspectivisch liegen, so müssen nothwendiger Weise die drei Projectionspunkte B, B_1 B_2 in einer Geraden liegen. Denn sind B, B_1 die Projectionspunkte der Geraden A und A_1, A und A_2, so ist die Gerade BB_1 ein Projectionsstrahl sowohl von A und A_1, als von A und A_2, so dass also der Punkt $\mathfrak{d}$, in welchem sie A begegnet, den Punkten $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$, in welchen sie A_1, A_2 schneidet, entspricht, und dass sie folglich auch ein [78] Projectionsstrahl von A_1 und A_2 ist, und durch ihren Projectionspunkt B_2 geht.

Wird umgekehrt angenommen, drei Strahlbüschel B, B_1, B_2 seien unter einander projectivisch, und liegen so, dass drei entsprechende Strahlen d, d_1, d_2 vereinigt sind, dass mithin je zwei Strahlbüschel perspectivisch liegen, so folgt auf ähnliche Weise, wie vorhin, dass die drei perspectivischen Durchschnitte A, A_1, A_2 einander in einem Punkte $(\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2)$ treffen. Also hat man folgende Sätze:

I. »*Sind drei Gerade A, A_1, A_2 unter einander projectivisch und liegen sie so, dass sie sich in einem Punkte schneiden, und dass in demselben drei entsprechende*

I. »*Sind drei Strahlbüschel B, B_1, B_2 unter einander projectivisch und liegen sie so, dass drei entsprechende Strahlen aufeinander fallen, also ihre Mittelpunkte in*

Punkte vereinigt, und mithin je zwei Gerade perspectivisch sind, so liegen die drei Projectionspunkte B, B_1, B_2 in einer Geraden.«

einer Geraden liegen, und mithin je zwei Strahlbüschel perspectivisch sind, so treffen sich die drei perspectivischen Durchschnitte A, A_1, A_2 in einem Punkt. «

Aus diesen Sätzen folgen unmittelbar nachstehende bekannte Sätze:

II. »*Treffen die drei Geraden A, A_1, A_2, welche die Ecken irgend zweier Dreiecke $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2$, in bestimmter Ordnung genommen, paarweise verbinden, in einem Punkte zusammen, so liegen die drei Punkte B, B_1, B_2, in welchen die gegenüber liegenden Seiten, in gleicher Ordnung paarweise genommen, einander schneiden, in einer Geraden.*« Denn man kann [79] festsetzen, die Geraden A, A_1 und A_2 sollen in Ansehung der gleichnamigen Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{e}_2$ projectivisch sein (§ 10, γ).

II. »*Liegen die drei Punkte B, B_1, B_2, in welchen die Seiten irgend zweier Dreiecke $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2$, in bestimmter Ordnung paarweise genommen, sich schneiden, in einer Geraden, so treffen die drei Geraden A, A_1, A_2, welche die gegenüber liegenden Ecken, in gleicher Ordnung paarweise genommen, verbinden, allemal in einem Punkte zusammen.*« Denn man kann [79] festsetzen, die Strahlbüschel B, B_1 und B_2 sollen in Ansehung der gleichnamigen Strahlen a, b, d und a_1, b_1, d_1 und a_2, b_2, d_2 projectivisch sein (§ 10, γ).

Es folgt ferner:

III. »*Bewegen sich die Ecken eines veränderlichen Dreiecks $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ in drei festen Geraden A, A_1, A_2, die durch einen Punkt $\mathfrak{e}$ gehen, und drehen sich zwei Seiten desselben, etwa $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_2$, um feste Punkte B, B_1, so geht auch die dritte Seite $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ beständig durch einen dritten festen Punkt B_2, der mit jenen beiden in einer Geraden liegt.*«[1])

III. »*Drehen sich die Seiten eines veränderlichen Dreiecks $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ um drei feste Punkte B, B_1, B_2, die in einer Geraden d liegen, und bewegen sich zwei Ecken desselben, etwa $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$, in festen Geraden A, A_1, so bewegt sich auch die dritte Ecke $\mathfrak{a}_2$ in einer dritten festen Geraden A_2, die sich mit jenen beiden in einem Punkte schneidet.*«[1])

Bei den obigen Sätzen (I) ist der besondere Fall möglich, dass einerseits (links) die drei Projectionspunkte B, B_1, B_2, und andererseits die drei perspectivischen Durchschnitte A, A_1, A_2 zusammen fallen; dieses leitet daher auf nachstehende Aufgaben.

IV. »*Drei gegebene Gerade A, A_1, A_2, die unter einander projectivisch sind, so in perspectivische Lage zu bringen, dass sie sich in einem Punkte $\mathfrak{e}$ schneiden und einen gemeinschaftlichen Projectionsstrahl B haben.*«

IV. »*Drei gegebene Strahlbüschel B, B_1, B_2, die unter einander projectivisch sind, so in perspectivische Lage zu bringen, dass ihre Mittelpunkte in einer Geraden liegen, und dass sie einen gemeinschaftlichen perspectivischen Durchschnitt A haben.*«

Die Auflösungen dieser Aufgaben sollen den Liebhabern vorläufig zur Uebung überlassen bleiben: sie lassen sich leicht auf frühere Sätze gründen (§ 15); später sollen sie mitgetheilt werden. Ich will hier nur [80] angeben, dass die erste Aufgabe (links) im Allgemeinen unendlich viele Auflösungen zulässt, wobei sich verschiedene drei entsprechende Punkte der Geraden in deren gemeinschaftlichem Durchschnitte vereinigen lassen. Giebt es auch entsprechende Punkte, bei deren Vereinigung keine Auflösung stattfindet? und welchen Spielraum haben sie? Was findet insbesondere statt, wenn die Geraden ähnlich sind? — Die andere Aufgabe dagegen lässt im Allgemeinen der Hauptsache nach nur zwei Auflösungen zu.

22. Durch Wiederholung oder Zusammensetzung eines obigen Satzes (§ 21) gelangt man unmittelbar zu einem berühmten Porisma, welches *Pappus*, in der Vorrede zum VII. Buch der Collectiones Mathematicae, mittheilt, und welches, wegen seines Scheins von Allgemeinheit, leicht für schwerer und umfassender gehalten wird, als es in der That ist, nämlich zu dem folgenden Porisma:

I. »Wenn in einer Ebene n beliebig gezogene gerade Linien einander irgend wie durchschneiden, und man hält die $n-1$ Durchschnittspunkte fest, die einer von ihnen, gleich viel welcher, angehören, während man alle übrigen beziehentlich um diese Punkte bewegt, und während $n-2$ von ihren gegenseitigen Durchschnitten, wovon keine drei denselben drei Geraden, keine vier denselben vier Geraden, u. s. w. angehören, gezwungen sind auf einer gleichen Anzahl gegebener Geraden, als Leitlinien genommen, zu bleiben: so werden alle übrigen Durchschnitte der bewegten Geraden, deren Anzahl eine Triangularzahl ist, einzeln andere Gerade beschreiben, die mit [81] jenen Leitlinien zugleich der Lage nach gegeben sein werden.«

In neuerer Zeit hat *Robert Simson* zuerst diesen Satz bewiesen. Mittelst der oben festgesetzten Erklärungen (§ 19) kann der vorstehende Satz, nebst seinem entsprechenden Satze wie folgt ausgesprochen werden.

II. »*Bewegen sich die Ecken eines veränderlichen vollständigen nEcks in n festen Geraden, die durch einen Punkt gehen, und*

II. »*Drehen sich die Seiten eines vollständigen veränderlichen n Seits um n feste Punkte, die in einer Geraden liegen, und bewegen sich* *drehen sich $n-1$ Seiten desselben, die irgend einem einfachen n Eck angehören, aus welchen das vollständige besteht, um eben so viele feste Punkte: so drehen sich auch die übrigen Seiten, an Zahl $\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}$, um andere feste Punkte, die also mit jenen festen Punkten zugleich gegeben sind.«*

$n-1$ Ecken desselben, die irgend einem einfachen n Eck angehören, aus denen das vollständige besteht, in eben so vielen festen Geraden: so bewegen sich auch die übrigen Ecken, an Zahl $\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}$, in anderen festen Geraden, die also mit jenen festen Geraden zugleich gegeben sind.«

In der That sind diese zwei Sätze, wie schon erwähnt worden, nichts anderes als eine zusammenhängende Wiederholung der obigen einfachen Sätze (§ 21, I). Oder noch leichter können sie aus folgenden Sätzen, deren Richtigkeit von selbst erhellt, zusammengesetzt werden. Nämlich:

III. »*Wenn bei drei Geraden A, A_1, A_2, die einander in einem Punkte schneiden, zwei mit der dritten projectivisch sind und mit ihr perspectivisch liegen, so sind sie auch unter sich* [82] *projectivisch und liegen perspectivisch.*«

III. »*Wenn von drei Strahlbüscheln B, B_1, B_2, deren Mittelpunkte in einer Geraden liegen, zwei mit dem dritten projectivisch sind, und mit ihm perspectivisch liegen, so sind sie auch* [82] *unter sich projectivisch und liegen perspectivisch.*«

Daraus folgt, durch Zusammensetzung, unmittelbar:

IV. »*Dass, wenn von n Geraden A, A_1, A_2, ... A_{n-1}, die durch einen und denselben Punkt gehen, der Reihe nach jede mit der darauf folgenden projectivisch ist, und mit ihr perspectivisch liegt, dann alle unter einander projectivisch sind, und perspectivisch liegen.*«

IV. »*Dass, wenn von n Strahlbüscheln B, B_1, B_2, ... B_{n-1}, deren Mittelpunkte in einer Geraden liegen, der Reihe nach jedes mit dem darauf folgenden projectivisch ist, und mit ihm perspectivisch liegt, dann alle unter einander projectivisch sind, und perspectivisch liegen.*«

In diesen Sätzen sind die obigen (II) enthalten. Denn wenn z. B., nach dem Satze (II, links), die Ecken eines vollständigen Vierecks $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ (Fig. 28) sich in den festen Geraden A, A_1, A_2, A_3 bewegen, während sich etwa die drei Seiten $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3$ des einfachen Vierecks $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}$ um die drei festen Punkte B, B_1, B_2 drehen, so sind offenbar A und A_1, A_1 und A_2, A_2 und A_3 in Ansehung der Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{a}_3$ projectivisch, und liegen perspectivisch, nämlich B, B_1, B_2 sind ihre Projectionspunkte;

daher sind, zufolge vorstehenden Satzes, auch A und A_2, A_1 und A_3, A und A_3, in Ansehung der Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_3$, projectivisch und liegen perspectivisch, so dass folglich auch die drei übrigen Seiten $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_3$ des vollständigen Vierecks sich um feste Punkte B_4, B_5, B_3 drehen, nämlich um die Projectionspunkte der letztgenannten Paar Geraden. Ueberdies folgt auch noch (§ 21, I), dass von den sechs Punkten B, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 viermal drei in einer Geraden liegen, dass sie also die Ecken eines vollständigen Vierseits sind.

[83] Wenn andererseits z. B. die Seiten eines vollständigen Vierseits a, a_1, a_2, a_3 (Fig. 29) sich um feste Punkte B, B_1, B_2, B_3 drehen, die in einer Geraden liegen, während sich etwa die drei Ecken $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ des Vierecks $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}$ in den drei festen Geraden A, A_1, A_2 bewegen, so sind offenbar die Strahlbüschel B und B_1, B_1 und B_2, B_2 und B_3, in Ansehung der entsprechenden Strahlen a und a_1, a_1 und a_2, a_2 und a_3 projectivisch und liegen perspectivisch, nämlich A, A_1, A_2 sind ihre perspectivischen Durchschnitte; daher sind auch die Strahlbüschel B und B_2, B_1 und B_3, B und B_3, in Ansehung der Strahlen a und a_2, a_1 und a_3, a und a_3, projectivisch und liegen perspectivisch (IV), so dass folglich auch die drei übrigen Ecken $\mathfrak{a}_4$, $\mathfrak{a}_5$, $\mathfrak{a}_3$ des vollständigen Vierseits sich in bestimmten festen Geraden A_4, A_5, A_3 bewegen, nämlich in den perspectivischen Durchschnitten der letztgenannten Strahlbüschelpaare. Ueberdies folgt noch (§ 21, I), dass die 6 Geraden A, A_1,... A_5 die 6 Seiten eines vollständigen Vierecks α, β, γ, δ sind.

Ganz eben so, wie bei diesen Beispielen, lassen sich die Sätze bei jeder anderen Figur nachweisen. Verschiedene besondere Fälle der obigen Sätze (II oder IV) — die einerseits (links) dadurch entstehen, dass von den festen Geraden einige auf einander fallen, oder dass die festen Punkte in einer Geraden liegen, und dass diese durch den gemeinschaftlichen Durchschnitt der festen Geraden geht, u. s. w.; und andererseits dadurch, dass die festen Punkte theilweise vereiniget werden, oder dass die festen Geraden durch einen Punkt gehen, und dass dieser mit den festen Punkten in einer Geraden liegt, u. s. w. — werden hier übergangen. Uebrigens sind die obigen Sätze selbst nur besondere Fälle [84] von allgemeineren und umfassenderen Sätzen, die in den zwei nächstfolgenden Kapiteln bewiesen werden.

23. Schneiden sich drei Gerade A, A_1, A_2 (Fig. 30), die unter einander projectivisch sind, in drei Punkten, und liegen je zwei derselben perspectivisch, so dass also in jedem Durchschnitte zwei entsprechende Punkte vereinigt sind, nämlich $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{k}_2$, $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$, und sind $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{l}$ die den vereinigten Punkten entsprechenden dritten Punkte, so sind in jedem der drei Strahlen $\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{k}\mathfrak{k}_2\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2\mathfrak{l}$ zwei Projectionsstrahlen vereinigt, nämlich $\mathfrak{e}\mathfrak{e}_2$ und $\mathfrak{e}_1\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{k}\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{k}_2\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}_2\mathfrak{l}$, und daher müssen ihre gegenseitigen Durchschnitte B, B_1, B_2 die Projectionspunkte der Geradenpaare A und A_1, A und A_2, A_1 und A_2 sein. Da auf ähnliche Weise, wenn man, statt von den Geraden A, A_1, A_2, von den Strahlbüscheln B, B_1, B_2 ausgeht, auch das Umgekehrte sich darthun lässt, so folgen also nachstehende Sätze.

I. »*Wenn die Seiten A, A_1, A_2 eines Dreiecks $\mathfrak{e}\mathfrak{k}\mathfrak{l}_1$ unter einander projectivisch sind, und wenn je zwei perspectivisch liegen, so sind ihre Projectionspunkte B, B_1, B_2, die Ecken eines anderen jenem umbeschriebenen Dreiecks.*«

I. »*Wenn die Ecken eines Dreiecks BB_1B_2 die Mittelpunkte projectivischer Strahlbüschel sind, wovon je zwei perspectivisch liegen, so bilden ihre perspectivischen Durchschnitte A, A_1, A_2 ein Dreieck $\mathfrak{e}\mathfrak{k}\mathfrak{l}_1$, welches jenem eingeschrieben ist.*«

Sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ irgend drei entsprechende Punkte, so ist das Dreieck $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ dem Dreiecke (Dreiseit) A, A_1, A_2 eingeschrieben und zugleich dem Dreiecke BB_1B_2 umschrieben; und da zur Bestimmung der projectivischen Beziehung der drei Geraden A, A_1, A_2 oder die drei Strahlbüschel B, B_1 B_2, dreimal drei entsprechende Punkte $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$; $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_2$; $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$ oder Strahlen e, e_1, e_2; k, k_1, k_2; l, l_1, l_2, willkürlich [**85**] angenommen werden können, so folgen ferner unmittelbar nachstehende Sätze.

II. »Wenn einem beliebigen Dreieck A, A_1, A_2 irgend ein zweites BB_1B_2 umschrieben ist, so giebt es unzählig viele andere Dreiecke $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$, ($\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2, \ldots$), von denen jedes dem ersten eingeschrieben und zugleich dem zweiten umschrieben ist.« Nämlich:

»*Beschreibt man irgend ein Dreieck $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$, dessen Ecken, in bestimmter Ordnung genommen, in den Seiten jenes ersten Dreiecks liegen, und von dessen Seiten zwei durch zwei Ecken des zweiten*

»*Beschreibt man irgend ein Dreieck $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$, dessen Seiten, in bestimmter Ordnung genommen, durch die Ecken jenes zweiten Dreiecks gehen, und von dessen Ecken zwei in zwei Seiten des ersten liegen,* *gehen, so geht allemal auch die dritte Seite desselben durch die dritte Ecke des zweiten.«*

so liegt allemal auch die dritte Ecke desselben in der dritten Seite des ersten.«

Oder mit anderen Worten:

»Ist einem Dreieck A, A_1, A_2 ein zweites BB_1B_2 umschrieben und bewegen sich die Ecken eines dritten Dreiecks $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ in den Seiten des ersten, während zwei Seiten, in bestimmter Ordnung genommen, sich um zwei Ecken des zweiten drehen, so dreht sich auch die dritte Seite desselben um die dritte Ecke des zweiten.«

»Ist einem Dreieck BB_1B_2 ein zweites A, A_1, A_2 eingeschrieben, und drehen sich die Seiten eines dritten Dreiecks $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ um die Ecken des ersten, während zwei Ecken, in bestimmter Ordnung genommen, sich in zwei Seiten des zweiten bewegen, so bewegt sich auch die dritte Ecke desselben in der dritten Seite des zweiten.«

III. *»Wenn von den Ecken eines Sechsecks $B_1BB_2\mathfrak{a}_1\mathfrak{e}\mathfrak{a}B_1$ zweimal drei, die nicht aufeinander folgen, in einer Geraden liegen,* [86] *wie etwa $\mathfrak{a}$, B, $\mathfrak{a}_1$ und B_1, $\mathfrak{e}$, B_2 in $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ und B_1B_2, so liegen auch die drei Durchschnitte $\mathfrak{l}_1\mathfrak{f}$, $\mathfrak{a}_2$ der einander gegenüber liegenden Seiten in einer Geraden.«*

III. *»Wenn von den Seiten eines Sechsecks $B_1B\mathfrak{a}_1\mathfrak{e}\mathfrak{f}\mathfrak{a}_2B_1$ zweimal drei, die nicht aufeinander folgen, durch einen Punkt gehen, wie etwa B_1B, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}\mathfrak{a}_2$ und $B\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{e}\mathfrak{f}$, $\mathfrak{a}_2B_1$ durch $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{a}$, so treffen sich auch die drei Geraden $B_1\mathfrak{e}$, $B\mathfrak{f}$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ durch die gegenüber liegenden Ecken einander in einem Punkte B_2.«*

Von diesen zwei bekannten Sätzen (III) ist der eine (links) das XIII. Lemma zu den Porismen des *Euklides*, welche *Pappus* im VII. Buche mittheilt. Im Anhange sollen diese Sätze umfassender gegeben werden.

Die obigen Verbindungen von drei projectivischen Geraden oder Strahlbüscheln, nebst weiteren Verbindungen der Art, würden leicht zu vielen anderen Sätzen führen, wenn der Raum gestattete, sie hier weiter zu verfolgen.

24. Es sollen hier noch drei projectivische Gerade und drei projectivische Strahlbüschel so verbunden werden, dass von den jedesmaligen drei Gebilden zwei unter sich schief, aber jedes mit dem dritten perspectivisch liegt.

Befinden sich von den drei beliebigen Geraden A, A_1, A_2 (Fig. 31), die unter einander projectivisch sind, zwei, etwa A, A_1, in schiefer, dagegen jede derselben mit der dritten A_2 in perspectivischer Lage, so dass also im Durchschnitte der ersteren irgend zwei, einander nicht entsprechende Punkte, etwa $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{d}_1$, dagegen in den Durchschnitten, die sie mit der letzteren A_2 bilden, zwei entsprechende Punktenpaare, etwa

$\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{k}_2$, $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$, vereinigt sind, und sind ferner B_1, B_2 die Projectionspunkte von A und A_2, A_1 und A_2: so werden offenbar in der Geraden B_1B_2 irgend drei entsprechende Projectionsstrahlen, etwa b, b_1, b_2, aufeinander fallen, und in jeder der zwei Geraden [87] $B_1\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2$, $B_2\mathfrak{k}\mathfrak{k}_2$ werden zwei entsprechende Strahlen, nämlich $\mathfrak{k}_2\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{k}\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{l}_2\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}$, vereinigt sein.

a) Werden umgekehrt in irgend einem Projectionsstrahl, etwa in b, zweier gegebener projectivischer Geraden A, A_1, die in schiefer Lage sich befinden, zwei beliebige Punkte B_1, B_2 als Mittelpunkte zweier Strahlbüschel angenommen, wovon der erste auf A und der andere auf A_1 bezogen wird, und die mithin in Ansehung der Strahlen a_1, b_1, c_1, $d_1, \ldots$ und a_2, b_2, c_2, $d_2, \ldots$ projectivisch sind (§ 11, III), so werden sie, da in dem Strahle b zwei entsprechende Strahlen b_1, b_2 vereinigt sind, perspectivisch liegen (§ 14), und ihr perspectivischer Durchschnitt A_2 wird offenbar mit jeder der zwei gegebenen Geraden A, A_1 projectivisch sein und perspectivisch liegen, nämlich A und A_2, A_1 und A_2 werden B_1, B_2 zum Projectionspunkt haben.

b) Werden die Punkte B_1, B_2 insbesondere in zwei entsprechenden Punkten $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}$ der gegebenen Geraden A_1, A angenommen, nämlich B_1 in $\mathfrak{b}_1$ und B_2 in $\mathfrak{b}$, wie (Fig. 33), so fallen die Strahlen e_1, d_2 mit den Geraden A_1, A zusammen, so dass also die Durchschnitte $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{d}_1$ der entsprechenden Strahlen e_1 und e_2, d_1 und d_2 in $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{d}$ liegen, und dass folglich in diesem Falle der perspectivische Durchschnitt A_2 der Strahlbüschel die gegebenen Geraden A_1, A in denjenigen Punkten schneidet, die den in ihrem Durchschnitte vereinigten Punkten $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{d}_1$ entsprechen. Da die Gerade A_2 durch die zwei Punkte $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{d}_1$, oder $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{d}_2$ bestimmt ist, so bleibt also der perspectivische Durchschnitt (A_2) derselbe, man mag die Mittelpunkte B_1, B_2 der Strahlbüschel, in welchen zwei entsprechenden Punkten der gegebenen Geraden A_1, A, also in $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}$, oder in $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}$, oder in $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}$, u. s. w., annehmen als man will; so dass also die Durchschnitte $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{f}_2, \ldots$ [88] der Geradenpaare $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}, \ldots$, die bei zwei schief liegenden projectivischen Geraden A, A_1 je zwei Paar entsprechender Punkte wechselseitig verbinden, in einer und derselben Geraden A_2 liegen.

Wenn andererseits von drei beliebigen Strahlbüscheln B, B_1, B_2 (Fig. 32), die unter einander projectivisch sind, sich zwei, etwa B, B_1, in **schiefer**, dagegen jeder derselben mit dem dritten B_2 in perspectivischer Lage befinden, so dass also in der Axe BB_1 der ersteren zwei einander nicht entsprechende Strahlen, etwa e, d_1, dagegen in jeder der zwei Axen BB_2, B_1B_2 zwei entsprechende Strahlen, etwa k und k_2, l_1 und l_2 vereinigt sind, und sind ferner A_1, A_2 die perspectivischen Durchschnitte der Strahlbüschel B und B_2, B_1 und B_2: so müssen offenbar im Durchschnitte der Geraden A_1, A_2 die Durchschnitte von irgend drei entsprechenden Strahlen, etwa die Durchschnitte $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$ der Strahlen b, b_1, b_2, und ferner müssen in jedem der beiden Punkte, wo die zwei Paar vereinigten entsprechenden Strahlen kk_2, l_1l_2 ihrem entsprechenden dritten Strahl k_1, l begegnen, zwei entsprechende Punkte $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{k}_2$, $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}_1$ vereinigt sein. Und umgekehrt:

α) Sind irgend zwei projectivische Strahlbüschel B, B_1 in schiefer Lage gegeben, und man zieht durch den Durchschnitt irgend zweier entsprechender Strahlen, z. B. durch den Durchschnitt $\mathfrak{b}$ der Strahlen b, b_1, zwei beliebige Gerade A_1, A_2, so werden letztere in Ansehung der Punkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$,... und $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{d}_2$,..., in welchen sie die Strahlbüschel B, B_1 schneiden, projectivisch sein (§ 11, III), und, da in dem Punkte $\mathfrak{b}$ zwei entsprechende Punkte $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$ derselben vereinigt sind, so werden sie perspectivisch liegen (§ 14), und ferner wird offenbar der [89] Strahlbüschel B_2, welcher durch ihre Projectionsstrahlen a_2, b_2, c_2, d_2,... gebildet wird, mit jedem der zwei gegebenen Strahlbüschel B, B_1 projectivisch sein und perspectivisch liegen, nämlich B und B_2, B_1 und B_2 werden die Geraden A_1, A_2 zum perspectivischen Durchschnitt haben.

β) Werden die Geraden A_1, A_2 insbesondere so gelegt, dass sie mit den Strahlen b_1, b zusammenfallen, wie (Fig. 34), so vereinigen sich, wie man sieht, die Punkte $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{d}_2$ mit den Mittelpunkten B, B_1 der gegebenen Strahlbüschel, so dass also in diesem Falle, statt der entsprechenden Strahlen k und k_2, l und l_1, die entsprechenden Strahlen d und d_2, e und e_1 aufeinander fallen, und dass folglich in diesem Falle der Projectionspunkt B_2 der Geraden A_1, A_2, der Durchschnitt derjenigen zwei Strahlen d, e_1 ist, deren entsprechende d_1, e in der Axe BB_1 der gegebenen Strahlbüschel B, B_1 vereinigt sind. Da der Punkt B_2 vermöge der Strahlen d, e_1 bestimmt ist, so bleibt also der Projectionspunkt der Geraden

A_1, A_2 der nämliche, man mag diese mit welchen zwei entsprechenden Strahlen der gegebenen Strahlbüschel B, B_1 zusammen fallen lassen, als man will, also mit b und b_1, oder mit a und a_1, oder mit c und c_1, u. s. w., so dass folglich die Geraden $a_2, c_2, f_2, \ldots$, die durch die Punktenpaare $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2, \ldots$ gehen, in welchen bei zwei schief liegenden projectivischen Strahlbüscheln B, B_1 je zwei entsprechende Strahlenpaare einander wechselseitig schneiden, in einem und demselben Punkte B_2 zusammentreffen.

In den vorstehenden Betrachtungen sind die Beweise und Auflösungen der nachfolgenden Sätze und Aufgaben enthalten.

[90] I. »*Bei jedem Sechseck* $B_1B_2\mathfrak{k}\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{l}_1B_1$ (Fig. 31), *welches zwei schief liegende projectivische Gerade* A, A_1 *und irgend vier Projectionsstrahlen* a, b, l, k *derselben zu Seiten hat* (α), *treffen die drei Diagonalen* $B_1\mathfrak{a}$, $B_2\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{k}\mathfrak{l}_1$, *welche die gegenüber liegenden Ecken verbinden, in irgend einem Punkte* $\mathfrak{a}_2$ *zusammen.*«

II. »*Bei zwei schief liegenden projectivischen Geraden* A, A_1 (Fig. 33) *liegen die Durchschnitte* $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{c}_2, \mathfrak{f}_2, \ldots$ *der verschiedenen Paar Geraden* ($\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{a}\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}\mathfrak{a}_1, \ldots$), *welche je zwei Paar entsprechender Punkte wechselseitig verbinden, in einer bestimmten Geraden* A_2, *die nämlich den gegebenen Geraden* A, A_1 *in denjenigen zwei Punkten* $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}_1$, *begegnet, deren entsprechende* $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{e}$ *in ihrem Durchschnitte vereinigt sind* (b).«

[90] I. »*Bei jedem Sechseck* $B\mathfrak{a}B_1\mathfrak{l}\mathfrak{b}\mathfrak{k}B$ (Fig. 32), *welches die Mittelpunkte* B, B_1 *zweier schief liegenden Strahlbüschel und irgend vier Durchschnitte* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{k}$ *entsprechender Strahlen zu Seiten hat* (α), *liegen die drei Durchschnitte* $\mathfrak{a}_1$, B_2, $\mathfrak{a}_2$ *der drei Paar gegenüber liegenden Seiten, in irgend einer Geraden* a_2.«

II. »*Bei zwei schief liegenden projectivischen Strahlbüscheln* B, B_1 (Fig. 34) *treffen die Geraden* $a_2, c_2, f_2, \ldots$ *durch die verschiedenen Punktenpaare* ($\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2, \ldots$), *in welchen je zwei Paar entsprechender Strahlen sich wechselseitig schneiden, in einem bestimmten Punkte* B_2 *zusammen, der nämlich mit den Mittelpunkten* B, B_1 *der Strahlbüschel durch diejenigen zwei Strahlen* d, e_1 *verbunden ist, deren entsprechende* d_1, e *in ihrer Axe vereinigt sind.* (β).«

Die Sätze (I) lassen sich auch umkehren. Die Sätze (II) enthalten die obigen Sätze (§ 20, IV) als besondere Fälle, und wie leicht zu sehen, den obigen Satz des *Pappus* nebst dessen entsprechenden (§ 23, III), als Theile in sich.

III. »*Zwei der Lage nach und projectivisch gegebene Gerade mittelst des Lineals allein, schief auf einander zu projiciren;*« *d. h.:* [91] a) »*Wenn bei zwei in schiefer*

III. »*Zwei der Lage nach und projectivisch gegebene Strahlbüschel mittelst des Lineals allein, schief auf einander zu* [91] *projiciren;*« *d. h.:* α) »*Wenn bei zwei in schiefer*

Lage gegebenen projectivischen Geraden A, A_1 eine zur Bestimmung ihrer projectivischen Beziehung hinreichende Zahl entsprechender Punktenpaare, also drei Paare, gegeben sind, so sollen mittelst des Lineals allein, andere entsprechende Punktenpaare gefunden werden, oder so soll zu jedem beliebigen Punkt in der einen Geraden der entsprechende in der anderen Geraden, und namentlich sollen b) diejenigen zwei Punkte ($\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}_1$), deren entsprechende im Durchschnitte der Geraden vereinigt sind, c) die Durchschnitte der Parallelstrahlen, und endlich d) derjenige Projectionsstrahl, welcher einem der drei gegebenen Projectionsstrahlen in irgend einem gegebenen Punkte begegnet, gefunden werden.«

Lage gegebenen projectivischen Strahlbüscheln B, B_1 eine zur Bestimmung ihrer projectivischen Beziehung hinreichende Zahl entsprechender Strahlenpaare, also drei Paare, gegeben sind, so sollen mittelst des Lineals allein, andere entsprechende Strahlenpaare gefunden werden, oder so soll zu jedem beliebigen Strahl des einen Strahlbüschels der entsprechende im anderen Strahlbüschel, und namentlich sollen β) diejenigen zwei Strahlen (d, e_1) deren entsprechende in der Axe BB_1 der Strahlbüschel vereinigt sind, und ferner γ) derjenige Durchschnitt irgend zweier entsprechenden Strahlen, welcher in irgend einer Geraden liegt, die durch den Durchschnitt eines der drei gegebenen entsprechenden Strahlenpaare geht, gefunden werden.«

Auflösung. 1) Sind A, A_1 (Fig. 31) die gegebenen Geraden, und sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}_1$ die drei Paar gegebener entsprechenden Punkte, so nehme man in einem der drei Projectionsstrahlen a, b, c, etwa in b, zwei beliebige Punkte B_1, B_2, ziehe aus ihnen die Strahlenpaare $B_1\mathfrak{a}$ und $B_2\mathfrak{a}_1$, $B_1\mathfrak{c}$ und $B_2\mathfrak{c}_1$, die sich in den Punkten $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{c}_2$ schneiden, und ziehe durch diese Punkte die Gerade A_2. Soll nun a) zu irgend einem Punkte $\mathfrak{x}$ in der Geraden A der [92] entsprechende Punkt $\mathfrak{x}_1$ in der Geraden A_1 gefunden werden, so ziehe man den Strahl $B_1\mathfrak{x}$, der die Gerade A_2 in einem Punkte $\mathfrak{x}_2$ schneiden wird, und ziehe sodann aus B_2 durch $\mathfrak{x}_2$ einen Strahl $B_2\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_1$, so wird dieser der Geraden A_1 in dem gesuchten Punkte $\mathfrak{x}_1$ begegnen. b) Zieht man also die Strahlen $B_1\mathfrak{e}$, $B_2\mathfrak{d}_1$, und sodann durch die Punkte $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{d}_2$, in welchen sie die Gerade A_2 schneiden, die Strahlen $B_2\mathfrak{e}_2\mathfrak{e}_1$, $B_1\mathfrak{d}_2\mathfrak{d}$, so müssen diese den gegebenen Geraden A_1, A in denjenigen Punkten $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{d}$ begegnen, welche den in ihrem Durchschnitte vereinigten Punkten $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{d}_1$ entsprechen. c) Und zieht man ferner durch B_1, B_2 die Strahlen q, r den Geraden A, A_1 parallel, und sodann durch die Punkte $\mathfrak{q}_2$, $\mathfrak{r}_2$ die Strahlen $B_2\mathfrak{q}_2\mathfrak{q}_1$, $B_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}$, so werden diese den Geraden A_1, A in den Durchschnitten $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{r}$ der Parallelstrahlen, d. h., in denjenigen Punkten begegnen, deren entsprechende $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}_1$ unendlich entfernt sind. d) Zieht man endlich durch die Punkte $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{l}_1$, in welchen die gegebenen Geraden A, A_1 von der Geraden A_2 geschnitten werden, die Strahlen $B_2\mathfrak{k}$, $B_1\mathfrak{l}_1$, so sind diese diejenigen Projectionsstrahlen k, l (der gegebenen Geraden A, A_1), welche dem gegebenen Projectionsstrahle b in den beliebig angenommenen Punkten B_2, B_1 begegnen. 2) Nimmt man die Punkte B_2, B_1 in den entsprechenden Punkten $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$ an, wie in (Fig. 33), so wird, wie man sieht, die Auflösung für die Forderung (b) sehr vereinfacht, indem alsdann die Gerade A_2 selbst durch die gesuchten Punkte $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{d}$ geht.

2) Sind andererseits B, B_1 (Fig. 32) die gegebenen Strahlbüschel, und a, b, c und a_1, b_1, c_1 die drei gegebenen entsprechenden Strahlenpaare, so ziehe man durch den Durchschnitt des einen Paars, etwa durch $\mathfrak{b}$, zwei beliebige Gerade A_1, A_2, die den übrigen gegebenen Strahlen in den Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{c}_1$; $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{c}_2$ begegnen, [93] und verbinde diese Punkte paarweise durch die Strahlen a_2, c_2, die sich in irgend einem Punkte B_2 schneiden werden. Soll nun α) zu irgend einem Strahl x des Strahlbüschels B der entsprechende Strahl x_1 im anderen Strahlbüschel B_1 gefunden werden, so verbinde man den Punkt $\mathfrak{x}_1$, in welchem x der Geraden A_1 begegnet, mit dem Punkte B_2 durch einen Strahl x_2, der die Gerade A_2 in einem Punkt $\mathfrak{x}_2$ schneiden wird, so wird alsdann $B_1\mathfrak{x}_2$ der gesuchte Strahl x_1 sein. β) Zieht man also die Axe BB_1, verbindet die Durchschnitte $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{d}_2$ mit B_2 durch die Strahlen e_2, d_2, die den Geraden A_2, A_1 in $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{d}_1$ begegnen, und zieht sodann die Strahlen $B_1\mathfrak{e}_2$, $B\mathfrak{d}_1$, oder e_1, d, so sind diese diejenigen Strahlen, deren entsprechende e, d_1 in der Axe BB_1 vereinigt sind. γ) Zieht man endlich aus B, B_1 durch B_2 die Strahlen k, l_1, die den Geraden A_2, A_1 in den Punkten $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{l}$ begegnen, so sind diese diejenigen Durchschnitte entsprechender Strahlen (k und k_1, l und l_1, der gegebenen Strahlbüschel B, B_1), welche in den, durch den Durchschnitt $\mathfrak{b}$ des gegebenen Strahlenpaars b, b_1 beliebig gezogenen Geraden A_2, A_1 liegen. 2) Für die Forderung β) wird die Auflösung vereinfacht, wenn man die entsprechenden Strahlen b, b_1 selbst statt der Geraden A_2, A_1 nimmt, wie in (Fig. 34), indem alsdann die gesuchten Strahlen d, e_1 durch den Punkt B_2 gehen.

IV. »Wenn bei zwei schiefliegenden projectivischen Gebilden B, A (d. h. ein Strahlbüschel B und eine Gerade A, siehe § 6, I) drei entsprechende Elementenpaare gegeben sind, so soll man mittelst des Lineals allein, zu irgend einem Element des einen Gebildes, das entsprechende Element des anderen Gebildes finden.«

[94] Diese Aufgabe kann leicht auf eine der vorigen Aufgaben (III) gebracht werden. Denn schneidet man den Strahlbüschel B durch irgend eine Gerade A_1, so ist diese mit der gegebenen Geraden A projectivisch, und die Aufgabe ist alsdann auf die obige (III. links) gebracht. Oder man beziehe irgend einen Strahlbüschel B_1 auf die gegebene Gerade A, so wird derselbe mit dem Strahlbüschel B projectivisch sein, und die Aufgabe ist alsdann auf die obige (III. rechts) gebracht.

25. Aus den vorigen Betrachtungen (§ 24) sind nur diejenigen Sätze und Aufgaben herausgehoben worden, die für spätere Untersuchungen unumgänglich erforderlich sind. Es hätten noch mehr Sätze und Aufgaben an dieselben angeschlossen werden können. Ferner würden andere Verbindungen der betrachteten projectivischen Gebilde noch viele interessante Resultate liefern, wenn nicht dieses Kapitel schon eine zu grosse Ausdehnung erlangt hätte.

Zum Schlusse dieses Kapitels soll nur noch die folgende bekannte Aufgabe gelöst werden.

»Wenn in einer Ebene zwei beliebige gleichnamige Vielecke gegeben sind, ein drittes zu beschreiben, welches dem einen umschrieben und dem anderen eingeschrieben ist.« Oder: »Ein Vieleck zu beschreiben, dessen Seiten der Reihe nach durch gegebene Punkte gehen, und dessen Ecken der Reihe nach in gegebenen Geraden liegen.«

Auflösung. Diese anscheinend schwere Aufgabe wird leicht auf die obige (§ 17) gebracht, so dass sie, sobald in der Ebene irgend ein Kreis gegeben ist, sofort mittelst des Lineals gelöst werden kann; nämlich wie folgt.

Es seien z. B. irgend vier Gerade A, A_1, A_2, A_3 **[95]** (Fig. 35) und irgend vier Punkte B, B_1, B_2, B_3 gegeben, so soll also ein Viereck beschrieben werden, dessen Ecken, in bestimmter Ordnung genommen, in jenen Geraden liegen und dessen Seiten, nach bestimmter Ordnung, durch jene Punkte gehen.

Werden die Punkte B, B_1, B_2, B_3 nach der Reihe als Projectionspunkte der Geradenpaare A und A_1, A_1 und A_2,

A_2 und A_3, A_3 und A_4 angenommen, wo nämlich A_4 eine mit A vereinigte fünfte Gerade ist, so sind alsdann alle Gerade unter einander projectivisch, also auch A und A_4 (§ 11, III), und zwar so, dass zu irgend einem Punkte $\mathfrak{a}$ in der ersten Geraden A, bloss durch Ziehen der Strahlen a, a_1, a_2, a_3 die entsprechenden Punkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}_4$ in den übrigen Geraden nach der Reihe gefunden werden. Nun verlangt die Aufgabe offenbar nichts anderes, als man solle den ersten Punkt $\mathfrak{a}$ so annehmen, dass der letzte $\mathfrak{a}_4$ mit ihm zusammentreffe. Es fallen aber bei zwei aufeinander gelegten projectivischen Geraden A, A_4 im Allgemeinen nur höchstens zwei Paar entsprechende Punkte aufeinander (§ 16, II), folglich sind im Allgemeinen auch nur zwei Vierecke möglich, die der Aufgabe genügen. Somit ist also die Aufgabe auf die obige (§ 17) gebracht, weil hiernach die genannten Vierecke gefunden sind, sobald man die vereinigten entsprechenden Punktenpaare ($\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}_4$, $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}_4$) der Geraden A, A_4 kennt. Um diese Punktenpaare finden zu können, ist aber nur nöthig, zu irgend drei beliebigen Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ in der Geraden A die entsprechenden Punkte $\mathfrak{a}_4$, $\mathfrak{b}_4$, $\mathfrak{c}_4$ in der Geraden A_4, nach der vorhin angegebenen Art, zu suchen.

Man könnte die Aufgabe auch so lösen, dass man statt der fünften Geraden A_4 ein fünftes, etwa mit B concentrisches, Strahlbüschel B_4 zu Hülfe nähme; [96] indessen wäre die Auflösung nicht so bequem, wie die vorstehende.

Es ist klar, dass die Auflösung sich ganz ähnlich bleibt, das zu beschreibende Vieleck mag so viele Seiten haben, als man will, und dass die Aufgabe, im Allgemeinen, nur zwei Auflösungen zulasse. Wenn aber die Rangordnung der gegebenen Punkte (B, B_1, B_2,...) und Geraden (A, A_1, A_2,...) nicht festgesetzt ist, dann ist die Zahl der Auflösungen viel grösser, und vermehrt sich mit der Seitenzahl des Vielecks; so z. B. würden bei dem vorhin betrachteten Fall, wo die zu beschreibende Figur nur ein Viereck war, 144 Auflösungen stattfinden *).

---

*) Es wurde schon oben (§ 19) erwähnt, dass durch n Punkte einer Ebene $3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots (n-1)$ verschiedene einfache n Ecke bestimmt werden.[2]) Man überzeugt sich davon wie folgt. Die Punkte lassen sich offenbar so oft in anderer Ordnung verbinden, als n Elemente sich versetzen lassen, also $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$ Mal. Allein je zwei Verbindungen, die einander gerade entgegengesetzt sind, d. h. wo die Rangordnung der Punkte gerade umgekehrt ist, sind offenbar nicht

Die Aufgabe umfasst eine grosse Menge besonderer Fälle, deren Besonderheit z. B. darin besteht, dass die gegebenen Punkte theilweise in Geraden liegen, oder die gegebenen Geraden theilweise durch dieselben Punkte gehen, oder dass die gegebenen Punkte oder Geraden theilweise aufeinander fallen; u. s. w. Die Auflösung dieser Fälle ist leicht aus der vorstehenden Auflösung zu entnehmen.

[97] Die obige Aufgabe wurde zuerst von den Mathematikern *Servois*, *Gergonne* und *Lhuilier* gelöst, im II. Bde. der *Annales de Mathématiques.* Die vorstehende Auflösung ist vermöge des Umstandes: »dass sie nur im Ziehen gerader Linien zwischen gegebenen Punktenpaaren besteht, sobald in der Ebene irgend ein Kreis gegeben ist;« unter allen mir bekannten Auflösungen die einfachste und leichteste.

---

zwei verschiedene, sondern nur ein und dasselbe n Eck (z. B. bei fünf Punkten ist $ABCDE$ und $EDCBA$ ein und dasselbe Fünfeck), daher ist auch die Zahl der verschiedenen n Ecke nur halb so gross als die Zahl der genannten Versetzungen.

Ausserdem kann ein einfaches n-Eck bei jeder seiner Ecken beginnen, [z. B. bei fünf Punkten sind $ABCDE$, $BCDEA$, $CDEAB$, u. s. w. immer ein und dasselbe Fünfeck], daher ist die Zahl der wirklich von einander verschiedenen n-Ecke nur:

$$\frac{1 . 2 . 3 \ldots . n}{2 . n} = 3 . 4 . 5 \ldots . (n-1) .$$

Wenn nun, in Beziehung auf die oben stehende Aufgabe, die Seiten eines (einfachen) n Ecks durch n gegebene Punkte $B, B_1, B_2, \ldots B_{n-1}$ gehen sollen, so sind dabei offenbar ebenfalls $3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots (n-1)$ verschiedene Rangordnungen möglich. Nun bleibt bei jedem von diesen $3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots (n-1)$ verschiedenen n Ecken noch die Rangordnung frei, nach welcher die Ecken desselben in den gegebenen Geraden A, $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$ liegen. Die Zahl dieser Ordnungen ist aber offenbar der Versetzungszahl für n Elemente (etwa für n Personen $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1 \ldots$ auf n Plätzen $A, A_1, \ldots$) gleich, also $= 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$. Da endlich, zufolge der oben stehenden Auflösung, für eine bestimmte Rangordnung der Punkte $B, B_1, B_2, \ldots$ und der Geraden $A, A_1, A_2, \ldots$, im Allgemeinen, zwei Auflösungen stattfinden, so ist folglich, wenn die Rangordnung weder der gegebenen Punkte $B, B_1, \ldots B_{n-1}$, noch der gegebenen Geraden $A, A_1, \ldots A_{n-1}$ festgesetzt ist, die Zahl aller Auflösungen im Allgemeinen

$$3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots (n-1) \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots n \times 2 = 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \ldots (n-1)^2 \cdot n.$$

Zweites Kapitel.

Von projectivischen Geraden, ebenen Strahlbüscheln und Ebenenbüscheln im Raume.

Ein Ebenenbüschel verbunden mit Geraden und ebenen Strahlbüscheln.

26. In dem vorhergehenden Kapitel war der Ort der Gebilde, die betrachtet wurden, ausdrücklich auf eine Ebene beschränkt. Es bleibt demnach noch übrig diese Gebilde, nämlich projectivische Gerade und [98] ebene Strahlbüschel, in solcher Lage zu untersuchen, wo sie nicht mehr in einer und derselben Ebene liegen. Zu diesem Ende ist es zweckmässig und, wie sich zeigen wird, der Natur der Sache angemessen, das dritte Gebilde, nämlich den Ebenenbüschel (§ 1, III), mit jenen zugleich zu betrachten.

Bei den folgenden Betrachtungen lassen sich die Gebilde und ihre verschiedenen Verbindungen, weil sie nicht mehr in einer Ebene liegen, nicht leicht durch Zeichnungen (Figuren) vorstellig machen; dieses ist aber auch nicht nöthig, weil durch zweckmässige Benennungen das Festhalten der Zusammenstellungen der zu betrachtenden Gebilde erleichtert wird. Ueberhaupt sind stereometrische Betrachtungen, meiner Meinung nach, nur dann richtig aufgefasst, wenn sie rein, ohne alle Versinnlichungsmittel, nur durch die innere Vorstellungskraft angeschaut werden. Wenigstens ist dieses für die synthetische Betrachtungsweise erforderlich, und vorzugsweise für Denjenigen, der darin erfinderisch zu Werke gehen will; denn nur auf diesem Wege kann er seinen Gegenstand selbst gewähren lassen, kann er den ganzen Umfang der Eigenschaften einer Figuren-Verbindung in allen ihren einzelnen Fällen und nach allen ihren Grenzen hin leicht und richtig durchschauen, und alle diese Fälle zusammen als ein in einander fliessendes oder aus sich selber heraustretendes Ganzes erkennen. Wenn auch im Anfange diese freie Vorstellung einige Mühe macht, so wird man doch bald eine gewisse Fertigkeit darin erlangen, und sich dann für die überstandene Anstrengung hinlänglich entschädiget finden. Wer bemüht wäre durch andere Mittel diese Anstrengung zu umgehen, der dürfte nicht wohl thun, indem er das Vorstellungsvermögen, statt gesund, [99] kräftig und lebensthätig zu machen, dasselbe vielmehr in dunkler, schwerfälliger Auffassung erhalten würde.

Da die folgenden Betrachtungen mit denen im vorigen Kapitel grosse Uebereinstimmung haben, ja da sie grossentheils durch die letzteren vorbereitet sind, oder sich auf dieselben stützen, so werde ich mich dabei kürzer fassen dürfen und nur nöthig haben, die Entwickelung so weit zu verfolgen, bis sie auf frühere Betrachtungen gebracht, oder bis die weitere Untersuchung durch ein mit dem frühern ganz übereinstimmendes Verfahren zu Ende geführt werden kann.

27. Nach der oben (§ 1, III) gegebenen Erklärung besteht ein Ebenenbüschel aus der unzähligen Menge von Ebenen, welche durch eine und dieselbe Gerade, Axe genannt, gehen. Die Axe eines solchen beliebigen Ebenenbüschels soll durch $\mathfrak{A}$ bezeichnet werden, und wenn von den Ebenen desselben einzelne namhaft gemacht werden sollen, so mögen sie α, β, γ, δ,... heissen.

I. Denkt man sich im Raume irgend einen Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$ und irgend eine Gerade A und bezieht beide auf einander, so findet man:

1) Dass im Allgemeinen durch jeden Punkt der Geraden A eine Ebene des Ebenenbüschels $\mathfrak{A}$ geht. Jeder Punkt und die durch ihn gehende Ebene sollen entsprechend heissen, und zwar sollen die den Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$,... entsprechenden Ebenen nach der Reihe durch α, β, γ, δ,... bezeichnet werden. Nur eine Ebene ist mit der Geraden A parallel, oder geht nach ihrem unendlich entfernten Punkte; sie heisse die Parallelebene (§ 2).[3])

2) Insbesondere kann die Gerade A in eine solche Lage übergehen, dass sie die Axe $\mathfrak{A}$ des [100] Ebenenbüschels schneidet, dann liegt sie in einer Ebene des letzteren, und schneidet alle übrigen Ebenen in einem und demselben Punkte, der nämlich der Durchschnitt der Geraden A und $\mathfrak{A}$ ist. Darunter ist auch der besondere Fall mitbegriffen, wo die Gerade A der Axe $\mathfrak{A}$ parallel, d. h. nach ihrem unendlich entfernten Punkte gerichtet ist.

II. Denkt man sich mit dem Ebenenbüschel 𝔄 zugleich irgend eine andere Ebene B, so finden zwischen ihnen folgende Beziehungen statt:

1) Ihr gegenseitiger Durchschnitt ist ein ebener Strahlbüschel, d. h., die Durchschnittslinien, in welchen alle Ebenen des Ebenenbüschels 𝔄 die besondere Ebene B schneiden, bilden zusammen einen Strahlbüschel B in dieser Ebene, dessen Mittelpunkt der Durchschnitt der Ebene B und Axe 𝔄 ist. Die Strahlen, oder die Durchschnittslinien, durch welche die einzelnen Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ gehen, sollen nach der Reihe durch $a, b, c, d, \ldots$ bezeichnet werden, und jeder Strahl und die durch ihn gehende Ebene sollen entsprechend heissen.

2) Die Ebene B kann insbesondere ihre Lage so verändern, dass sie der Axe 𝔄 parallel wird: dann entfernt sich der Mittelpunkt des ebenen Strahlbüschels B ins Unendliche, und alle Strahlen desselben werden parallel, nämlich der Axe 𝔄 parallel. Nähert sich in diesem Falle ferner die Ebene B der ihr parallelen Axe 𝔄, bis sie endlich diese in sich aufnimmt, so wird sie mit irgend einer Ebene des Ebenenbüschels 𝔄 zusammenfallen, und mit allen übrigen Ebenen die Axe 𝔄 zum gemeinschaftlichen Durchschnitt [**101**] haben, so dass also der Strahlbüschel B sich auf diese Axe reducirt.

3) Endlich kann die Ebene B auch eine solche besondere Lage haben, dass sie zu der Axe 𝔄 senkrecht ist: dann werden durch die Winkel im Strahlbüschel B die Flächenwinkel im Ebenenbüschel 𝔄 dargestellt, d. h., der Winkel, welchen irgend zwei Strahlen des ersteren einschliessen, ist dem Flächenwinkel der ihnen entsprechenden Ebenen gleich, so dass also z. B. Winkel $(ab) = (\alpha\beta)$, $(ac) = (\alpha\gamma)$, $(bc) = (\beta\gamma), \ldots$, wenn nämlich der Winkel, den zwei Ebenen, etwa α, β einschliessen, durch $(\alpha\beta)$ bezeichnet wird.[4])

III. Hat man auf die vorstehende Art eine Gerade A (I) oder einen ebenen Strahlbüschel B (II) auf einen Ebenenbüschel 𝔄 bezogen, so sollen die jedesmaligen zwei Gebilde A und 𝔄, oder B und 𝔄 »projectivisch« heissen, nämlich in Ansehung der entsprechenden Elementenpaare 𝔞 und α, 𝔟 und β, 𝔠 und $\gamma, \ldots$, oder a und α, b und β, c und $\gamma, \ldots$

Befinden sich die Gebilde in solcher Lage, dass die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}, \ldots$ oder die Strahlen a, b, $c, \ldots$ in den ihnen entsprechenden Ebenen α, β, $\gamma, \ldots$ liegen, wie bei vorstehenden Betrachtungen, so soll gesagt werden, sie seien oder sie liegen »perspectivisch«, und wenn dieses nicht der Fall ist, so soll ihre Lage »schief« heissen.

IV. Der Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$ kann sich insbesondere so verändern, dass seine Axe $\mathfrak{A}$ sich ins Unendliche entfernt, so dass alle Ebenen α, β, $\gamma, \ldots$ desselben unter sich parallel werden. Daher kann man umgekehrt irgend ein System von Parallelebenen als einen Ebenenbüschel betrachten, dessen Axe unendlich entfernt ist. Bei einem solchen Ebenenbüschel wird irgend eine [**102**] schneidende Ebene B einen ebenen Strahlbüschel hervorbringen (II), dessen Strahlen ebenfalls parallel sind.[5])

28. Die Geraden und die ebenen Strahlbüschel, welche mit einem und demselben Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$ perspectivisch sind (§ 27), haben unter einander folgende Beziehungen:

Je zwei ebene Strahlbüschel B, B_1, die in demselben Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$ liegen, d. h. die entstehen, wenn letzterer von irgend zwei Ebenen B, B_1 geschnitten wird, sind in Betracht der Strahlenpaare a und a_1, b und b_1, c und $c_1, \ldots,$ die beziehlich in den Ebenen α, β, $\gamma, \ldots$ des Ebenenbüschels $\mathfrak{A}$ liegen, projectivisch, und zwar kann man sagen sie liegen perspectivisch. Denn wird die Durchschnittslinie der beiden Ebenen B, B_1 durch A bezeichnet, so werden, wie sich aus der Anschauung ergiebt, alle Strahlenpaare a und a_1, b und b_1, c und $c_1, \ldots$ der Strahlbüschel B und B_1, sich auf der Geraden A schneiden, und heissen diese Durchschnittspunkte, wie gehörig, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}, \ldots,$ so sind einerseits B und A in Ansehung der Elemente a, b, $c, \ldots$ und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}, \ldots$ und andererseits B_1 und A in Ansehung der Elemente a_1, b_1, $c_1, \ldots$ und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}, \ldots$ projectivisch (§ 2), folglich sind auch B und B_1 in Hinsicht der Elemente a, b, $c, \ldots$ und a_1, b_1, $c_1, \ldots$ projectivisch, und zwar, da die Durchschnitte der entsprechenden Strahlen auf einer Geraden, nämlich auf A liegen, so soll ihre Lage, obgleich sie sich nicht in einer Ebene befinden, perspectivisch heissen, und jene Gerade A soll ihr perspectivischer Durchschnitt und die Axe $\mathfrak{A}$ des Ebenenbüschels ihre Projectionsaxe genannt werden. Wird also von zwei projectivischen ebenen Strahlbüscheln, die in einer Ebene perspectivisch liegen, wie etwa B, B_1 (Fig. 10) der eine um den perspectivischen Durchschnitt A [**103**] herumbewegt, so bleiben die Strahlbüschel fortwährend perspectivisch, und liegen, sobald sie sich nicht mehr in einer Ebene befinden, in einem Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, welcher durch sie bestimmt wird.

Wenn insbesondere die Ebenen B, B_1 der Axe $\mathfrak{A}$ des Ebenenbüschels in einem und demselben Punkte begegnen, so dass also die ebenen Strahlbüschel B, B_1 concentrisch sind, so geht auch der perspectivische Durchschnitt A durch ihren gemeinschaftlichen Mittelpunkt, und zwar sind in ihm (in A) zwei entsprechende Strahlen vereinigt. Und also auch umgekehrt: Werden zwei projectivische ebene Strahlbüschel B, B_1 beliebig concentrisch gelegt, ohne dass sie in einer Ebene liegen, aber dass zwei entsprechende Strahlen zusammenfallen, so sind sie perspectivisch, nämlich sie liegen in einem und demselben Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, der durch sie bestimmt wird, und der gemeinschaftliche Strahl ist als ihr perspectivischer Durchschnitt anzusehen.

Nun folgt ferner, dass irgend ein ebener Strahlbüschel B und irgend eine Gerade A (die nicht in der Ebene B liegt), die in demselben Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$ liegen, in Ansehung der Elemente a, b, c, d, ... und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, ... projectivisch sind. Denn denkt man sich irgend eine Ebene B_1 durch A, so bringt sie (im Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$) einen ebenen Strahlbüschel B_1 hervor, der, wie man sieht, mit A in Ansehung der Elemente a_1, b_1, c_1, ... und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ... projectivisch ist, und da er, zufolge vorstehender Betrachtung, auch mit B projectivisch ist, so sind folglich auch B und A projectivisch (§ 11, II), wie behauptet worden.

Daher sind ferner je zwei Gerade A, A_1, die in demselben Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$ liegen, in Ansehung der entsprechenden Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ... und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, ... projectivisch. Denn sie sind beide mit dem ebenen [**104**] Strahlbüschel B, mithin auch unter sich projectivisch.[6]) Schneiden die Geraden A, A_1 einander, so sind sie perspectivisch, nämlich ihr Projectionspunkt liegt in der Axe des Ebenenbüschels $\mathfrak{A}$, er ist der Durchschnitt dieser Axe und der Ebene, in welcher alsdann die Geraden liegen.

Das Ergebniss der vorstehenden Betrachtungen besteht also in folgenden Eigenschaften:

I. »Je zwei ebene Strahlbüschel B, B_1, die in einem und demselben Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$ liegen, sind perspectivisch, und zwar ist der Durchschnitt ihrer Ebenen ihr perspectivischer Durchschnitt.« Und umgekehrt: »Haben zwei projectivische ebene Strahlbüschel B, B_1 einen perspectivischen Durchschnitt A, d. h., sind sie perspectivisch, so liegen sie in einem Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, der durch sie bestimmt wird, oder insbesondere in einer Ebene; wird nämlich der eine um A herumbewegt, so bleiben sie stets in irgend einem Ebenenbüschel, und fallen endlich die Ebenen beider Strahlbüschel aufeinander, so vereinigen sich alle Ebenen des Ebenenbüschels mit ihnen.« »Liegen die Strahlbüschel B, B_1 im Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$ insbesondere concentrisch, so sind im perspectivischen Durchschnitt A, der dann durch den gemeinschaftlichen Mittelpunkt geht, zwei entsprechende Strahlen vereinigt; und umgekehrt, sind bei zwei projectivischen ebenen Strahlbüscheln B, B_1, die nicht in einerlei Ebene liegen, die Mittelpunkte und zwei entsprechende Strahlen vereinigt, so liegen sie in einem Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, dessen Axe $\mathfrak{A}$ natürlicherweise durch den gemeinsamen [**105**] Mittelpunkt geht, und der gemeinschaftliche Strahl ist als perspectivischer Durchschnitt der Strahlbüschel anzusehen.«[7])

II. »Jede Gerade A und jeder ebene Strahlbüschel B, die in einem und demselben Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$ liegen, sind projectivisch.«

III. »Je zwei Gerade A, A_1, die in einem und demselben Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$ liegen, sind projectivisch, und wenn sie sich schneiden, so sind sie perspectivisch, und ihr Projectionspunkt liegt in der Axe $\mathfrak{A}$ des Ebenenbüschels.«

In Hinsicht ähnlicher Geraden und in Hinsicht gleicher ebener Strahlbüschel finden insbesondere folgende Eigenschaften statt:

IV. »Alle Geraden, die in demselben Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$ liegen und mit einer und derselben Ebene desselben parallel gehen, sind projectivisch ähnlich.« Und umgekehrt: »Alle Geraden, die in demselben Ebenenbüschel liegen und ähnlich sind, sind mit einer und derselben Ebene desselben parallel.« Denn da jede Ebene des Ebenenbüschels durch entsprechende Punkte der Geraden geht, so werden, da die Geraden mit derselben

Ebene parallel sind, ihre unendlich entfernten Punkte sich entsprechen (§ 27, I), und daher folgt ihre Aehnlichkeit (§ 13, I, a). Wenn insbesondere der Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$ aus Parallelebenen besteht, wenn seine Axe unendlich entfernt ist (§ 27, IV), so sind alle Geraden, die in einem solchen Ebenenbüschel liegen, projectivisch ähnlich, und diejenigen Geraden, die unter gleichen Winkeln zu den Ebenen geneigt sind, sind projectivisch gleich.

V. »Ebene Strahlbüschel, die in demselben [106] Ebenenbüschel liegen, sind projectivisch gleich, wenn entweder

1) ihre Ebenen parallel sind, oder
2) wenn diejenige Ebene, welche den durch die Ebenen der Strahlbüschel gebildeten Flächenwinkel hälftet, zu der Axe $\mathfrak{A}$ des Ebenenbüschels senkrecht ist;

und auch umgekehrt.« Die Wahrheit dieses Satzes ist leicht zu erweisen, nämlich im ersten Falle (1) sind offenbar je zwei entsprechende Strahlen der Strahlbüschel parallel, und folglich je zwei entsprechende Winkel gleich, u. s. w.

29. Da die Flächenwinkel des Ebenenbüschels $\mathfrak{A}$ durch irgend einen ebenen Strahlbüschel B_1, dessen Ebene zu der Axe $\mathfrak{A}$ desselben senkrecht ist, dargestellt werden (§ 27, II, 3), und da dieser Strahlbüschel B_1 mit jedem anderen Strahlbüschel B, oder mit jeder Geraden A, die in dem Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$ liegt, projectivisch ist (§ 28), so hat man zwischen irgend viermal drei entsprechenden Elementen der drei projectivischen Gebilde $\mathfrak{A}$, B, A, etwa zwischen α, β, γ, δ; a, b, c, d; $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ folgende Bedingungen (§ 4 und § 10):

$$\text{I.}\quad\begin{cases} \dfrac{\sin(\alpha\gamma)}{\sin(\beta\gamma)}:\dfrac{\sin(\alpha\delta)}{\sin(\beta\delta)}=\dfrac{\sin(ac)}{\sin(bc)}:\dfrac{\sin(ad)}{\sin(bd)}=\dfrac{\mathfrak{ac}}{\mathfrak{bc}}:\dfrac{\mathfrak{ad}}{\mathfrak{bd}},\\[2ex] \dfrac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\gamma\beta)}:\dfrac{\sin(\alpha\delta)}{\sin(\gamma\delta)}=\dfrac{\sin(ab)}{\sin(cb)}:\dfrac{\sin(ad)}{\sin(cd)}=\dfrac{\mathfrak{ab}}{\mathfrak{cb}}:\dfrac{\mathfrak{ad}}{\mathfrak{cd}},\\[2ex] \dfrac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\delta\beta)}:\dfrac{\sin(\alpha\gamma)}{\sin(\delta\gamma)}=\dfrac{\sin(ab)}{\sin(db)}:\dfrac{\sin(ac)}{\sin(dc)}=\dfrac{\mathfrak{ab}}{\mathfrak{db}}:\dfrac{\mathfrak{ac}}{\mathfrak{dc}}. \end{cases}$$

Und umgekehrt:

II. »Sind die Elemente zweier Gebilde $\mathfrak{A}$ und B, oder $\mathfrak{A}$ und A, so einander entsprechend angenommen, dass zwischen je vier Elementenpaaren (bei gleicher

Aufeinanderfolge [**107**] der Elemente in den jedesmaligen zwei Gebilden (§ 6, γ) oder (§ 10)) gleiche Doppelverhältnisse stattfinden, wie die vorstehenden, so sind die Gebilde projectivisch.«

Daher folgt ferner:

III. »Dass das ganze System der entsprechenden Elementenpaare zweier projectivischen Gebilde $\mathfrak{A}$ und A, oder $\mathfrak{A}$ und B bestimmt sei, sobald drei Paare gegeben sind (§ 6, α); und dass, um eine projectivische Beziehung zwischen den Gebilden zu bestimmen, drei entsprechende Elementenpaare beliebig gewählt werden dürfen (§ 6, β).«

Sollen, wenn bei $\mathfrak{A}$ und B, oder bei $\mathfrak{A}$ und A drei Paar entsprechender Elemente gegeben sind, andere entsprechende Elemente gefunden werden, so ist die Aufgabe leicht auf die obige (§ 6) oder (§ 24, III) zurückzuführen. Denn welche gegenseitige Lage die Gebilde auch haben mögen, so darf man nur einen ebenen Strahlbüschel B_1 oder eine Gerade A_1 annehmen, die mit dem Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$ perspectivisch sind, und kann sofort zwischen B_1 oder A_1 und den gegebenen Gebilden B oder A die entsprechende Aufgabe lösen.

IV. »Liegen zwei projectivische Gebilde $\mathfrak{A}$ und B, oder $\mathfrak{A}$ und A so, dass irgend drei Paar entsprechende Elemente zusammentreffen, d. h., dass drei Strahlen von B, oder drei Punkte von A in den ihnen entsprechenden drei Ebenen von $\mathfrak{A}$ liegen, so liegen die jedesmaligen zwei Gebilde perspectivisch (§ 27), so dass je zwei entsprechende Elemente zusammentreffen.«

V. »*Befinden sich zwei projectivische Gebilde* $\mathfrak{A}$ [**108**] *und* A *in beliebiger schiefer Lage, so treffen entweder zwei, oder ein, oder kein Paar entsprechender Elemente derselben zusammen, nämlich gerade so, wie bei den Gebilden* B *und* A (§ 16, IV), *oder wie bei zwei aufeinander gelegten projectivischen Geraden* A, A_1 (§ 16, II).« Denn denkt man sich mit der gegebenen Geraden A eine andere Gerade A_1 vereinigt, die mit dem Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$ perspectivisch ist, so

V. »*Befinden sich zwei projectivische Gebilde* $\mathfrak{A}$ [**108**] *und* B *in schiefer Lage, und liegt der Mittelpunkt* B *in der Axe* $\mathfrak{A}$, *so fallen entweder zwei, oder ein, oder kein Paar entsprechender Elemente derselben aufeinander, nämlich gerade so, wie bei zwei projectivischen ebenen Strahlbüscheln* B, B_1, *die in einer Ebene concentrisch liegen* (§ 16, II).« Denn denkt man sich in der Ebene des gegebenen Strahlbüschels B einen anderen B_1, welcher mit ihm concentrisch und mit $\mathfrak{A}$

sind A und A_1 projectivisch, woraus sofort die Richtigkeit der Aussage folgt. Die vereinigten entsprechenden Elementenpaare der Gebilde $\mathfrak{A}$, A werdem demzufolge nach (§ 17) gefunden.

perspectivisch ist, so sind B und B_1 projectivisch, woraus sofort die genannten Eigenschaften folgen. Die vereinigten entsprechenden Elementenpaare der Gebilde $\mathfrak{A}$, B werden demzufolge nach (§ 17) gefunden.

Mit Rücksicht auf (§ 8) und (§ 12, II) folgt insbesondere ferner (§ 28, I, II, III):

VI. »Schneiden irgend vier Ebenen des Ebenenbüschels $\mathfrak{A}$, etwa die Ebenen α, β, γ, δ, entweder irgend eine Gerade A in vier harmonischen Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, oder irgend eine Ebene B in vier harmonischen Strahlen a, b, c, d, so schneiden sie auch jede andere Gerade A_1 in vier harmonischen Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$, und jede andere Ebene B_1 in vier harmonischen Strahlen a_1, b_1, c_1, d_1.«

Unter diesen Umständen sollen die vier Ebenen α, β, γ, δ »harmonische Ebenen« heissen, und zwar sollen auf dieselbe Weise wie bei harmonischen Punkten und harmonischen Strahlen (§ 8, I), je zwei nicht nacheinander folgende Ebenen »zugeordnete [**109**] harmonische Ebenen« heissen. Alsdann lassen sich fast alle Eigenschaften, die daselbst (§ 8) von vier harmonischen Strahlen entwickelt wurden, wörtlich auf vier harmonische Ebenen α, β, γ, δ übertragen. Ferner sind die letzten Sätze in (§ 12, II) zu übertragen, nämlich wie folgt:

VII. »Sind in einem Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$ vier harmonische Ebenen, und in einer Geraden A vier harmonische Punkte, oder in einem ebenen Strahlbüschel B vier harmonische Strahlen gegeben, so sind die Gebilde $\mathfrak{A}$ und A, oder $\mathfrak{A}$ und B in Ansehung der gegebenen Elemente, auf acht verschiedene Arten projectivisch, nämlich man kann jedes Paar zugeordnete harmonische Elemente des einen Gebildes, sowohl als dem einen oder dem anderen Paar zugeordneter harmonischer Elemente des anderen Gebildes entsprechend annehmen.«

Es folgt weiter:

VIII. »*Werden drei Ebenen* (α, β, γ) *eines Ebenenbüschels* $\mathfrak{A}$ *durch irgend eine Gerade* A, *oder durch*

VIII. »*Gehen durch drei gegebene Punkte* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ *einer Geraden* A *drei Ebenen* (α, β, γ)

irgend eine Ebene B geschnitten, so ist der Ort desjenigen Punktes $\mathfrak{d}$ *oder Strahles d, der zu den drei Durchschnittspunkten* ($\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$) *oder Durchschnittsstrahlen* (a, b, c), *der vierte harmonische Punkt oder Strahl ist, eine bestimmte vierte Ebene δ des Ebenenbüschels* $\mathfrak{A}$, *nämlich die vierte harmonische Ebene zu den drei gegebenen Ebenen.«*

eines Ebenenbüschels $\mathfrak{A}$ *oder drei Strahlen* (a, b, c) *eines ebenen Strahlbüschels B, so geht die zu den drei Ebenen gehörige vierte harmonische Ebene δ, oder der zu den drei Strahlen gehörige vierte harmonische Strahl d, durch einen bestimmten vierten Punkt* $\mathfrak{d}$ *der Geraden A, nämlich durch den vierten harmonischen Punkt zu den drei gegebenen Punkten.«*

[**110**] Aus diesen letzteren Sätzen, verbunden mit (§ 20, IV), folgt ferner:

IX. »*Sind α, β, γ irgend drei Ebenen eines Ebenenbüschels* $\mathfrak{A}$, *und man nimmt in der einen, etwa in β, irgend einen Punkt* $\mathfrak{b}$ *an, zieht aus ihm zwei beliebige Gerade A, A_1, die den zwei übrigen Ebenen α, γ in den Punktenpaaren* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}_1$ *und* $\mathfrak{c}_1$ *begegnen werden, und verbindet diese Punktenpaare wechselseitig durch Gerade* ($\mathfrak{a}\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}\mathfrak{a}_1$), *so ist der Ort des Durchschnitts* $\mathfrak{d}$ *der letzteren eine bestimmte vierte Ebene δ des Ebenenbüschels, die nämlich zu jenen drei Ebenen die vierte, und zwar der β zugeordnete, harmonische Ebene ist.«*

IX. »*Sind* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ *irgend drei Punkte einer Geraden A, und man legt durch den einen, etwa durch* $\mathfrak{b}$, *irgend eine Ebene β, nimmt in dieser zwei beliebige Gerade* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ *an, die mit den zwei übrigen Punkten* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$ *die Ebenenpaare α und γ, α_1 und γ_1 bestimmen, und legt durch die zwei Durchschnittslinien, in denen diese Ebenenpaare sich wechselseitig* ($\alpha\gamma_1$, $\gamma\alpha_1$) *schneiden, eine Ebene, so geht diese stets durch einen bestimmten vierten Punkt* $\mathfrak{d}$ *der Geraden A, der zu* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ *der vierte, und zwar dem* $\mathfrak{b}$ *zugeordnete, harmonische Punkt ist.«*

Aus diesen Sätzen folgert man nach *Carnot* weiter:

X. »*Haben irgend zwei dreiseitige Pyramiden* $\mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2$, *einen gemeinschaftlichen Körperwinkel* $\mathfrak{b}$, *so finden zwischen ihren übrigen Elementen folgende Umstände statt: heissen die Ebenen, in denen die Grundflächen* $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2$ *liegen, α, γ, heisst der durch diese bestimmte Ebenenbüschel* $\mathfrak{A}$, *und die durch die Spitze* $\mathfrak{b}$ *gehende Ebene des letzteren β, so werden die Durchschnittspunkte der* [**111**] *Diagonalen der drei Vierecke* $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_2\mathfrak{c}\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2$, *die sich in den Seitenebenen des Körperwinkels* $\mathfrak{b}$ *befinden, in einer vierten Ebene δ des Ebenenbüschels* $\mathfrak{A}$

X. »*Haben irgend zwei dreiseitige Pyramiden* $\beta\alpha\alpha_1\alpha_2$, $\beta\gamma\gamma_1\gamma_2$ *eine gemeinschaftliche Grundfläche β, so finden zwischen ihren übrigen Elementen folgende Umstände statt: heissen die Spitzen der Pyramiden* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$, *heisst die durch diese Spitzen gehende Gerade A, und der Punkt, in welchem diese der Ebene der Grundfläche β begegnet,* $\mathfrak{b}$, *so gehen die drei Ebenen, welche in den drei vierflächigen Körperwinkeln* $\alpha\alpha_1\gamma\gamma_1$, [**111**] $\alpha\alpha_2\gamma\gamma_2$, $\alpha_1\alpha_2\gamma_1\gamma_2$ *durch diejenigen gegenüber stehenden Kanten gelegt werden, in denen die ungleichnamigen Ebenen* (α, γ_1, und α_1, γ;

liegen, und zwar sind α, β, γ, δ vier harmonische Ebenen und es sind α und γ, β und δ einander zugeordnet.«[8])	α, γ_2 und $\alpha_2 \gamma$; α_1, γ_2 und α_2, γ_1) *sich schneiden, durch einen vierten Punkt* $\mathfrak{d}$ *der Geraden A, und zwar sind* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ *vier harmonische Punkte.«*[9])

Weitere Folgerungen, deren hier noch viele möglich sind, werden gegenwärtig übergangen; im zweiten Hefte werden einige davon, bei Gelegenheit zweckmässiger Anwendung, nachgeholt werden.

Ebenenbüschel unter sich.

30. Bisher befand sich unter den Gebilden, die betrachtet wurden, nur ein einziger Ebenenbüschel, nun aber sollen mehrere zugleich berücksichtigt werden, und zwar sollen sie, auf ähnliche Weise wie früher die anderen Gebilde, aufeinander bezogen und die aus dieser Beziehung entspringenden Eigenschaften untersucht werden.

Zwei Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, die entweder mit einer und derselben Geraden A, oder mit einem und demselben ebenen Strahlbüschel B projectivisch sind (§ 27, III), sollen auch unter sich »projectivisch« heissen.

Zufolge dieser Erklärung, mit Bezug auf die obigen Sätze (§ 29), finden zwischen den entsprechenden Elementen projectivischer Ebenenbüschel nachstehende Gesetze statt.

I. Je vier entsprechende Ebenenpaare zweier projectivischer Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, etwa die Ebenen [112] α, β, γ, δ und α_1, β_1, γ_1, δ_1 erfüllen folgende Bedingungen (§ 29, I):

$$\frac{\sin(\alpha\gamma)}{\sin(\beta\gamma)} : \frac{\sin(\alpha\delta)}{\sin(\beta\delta)} = \frac{\sin(\alpha_1\gamma_1)}{\sin(\beta_1\gamma_1)} : \frac{\sin(\alpha_1\delta_1)}{\sin(\beta_1\delta_1)},$$

$$\frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\gamma\beta)} : \frac{\sin(\alpha\delta)}{\sin(\gamma\delta)} = \frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\gamma_1\beta_1)} : \frac{\sin(\alpha_1\delta_1)}{\sin(\gamma_1\delta_1)},$$

$$\frac{\sin(\alpha\beta)}{\sin(\delta\beta)} : \frac{\sin(\alpha\gamma)}{\sin(\delta\gamma)} = \frac{\sin(\alpha_1\beta_1)}{\sin(\delta_1\beta_1)} : \frac{\sin(\alpha_1\gamma_1)}{\sin(\delta_1\gamma_1)}.$$

II. Und umgekehrt:

»Sind die Ebenen zweier Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ so einander entsprechend angenommen, dass zwischen je vier Paaren gleiche Doppelverhältnisse stattfinden, wie die vorstehenden, wobei die Aufeinanderfolge der Ebenen in beiden Ebenenbüscheln nothwendiger Weise übereinstimmend sein muss (§ 10), so sind die Ebenenbüschel projectivisch.«

III. Ferner folgt:

»Das ganze System der entsprechenden Ebenenpaare zweier projectivischer Ebenenbüschel ist bestimmt, wenn irgend drei Paare gegeben sind (§ 29, III); und will man zwei Ebenenbüschel aufeinander projectivisch beziehen, so können drei Paar entsprechende Ebenen beliebig angenommen werden.«

IV. »Bei zwei projectivischen Ebenenbüscheln $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ entsprechen vier harmonischen Ebenen des einen auch vier harmonische Ebenen des anderen Ebenenbüschels (§ 29, IV).«

V. Es folgt weiter (§ 11, II):

»Dass, wenn von mehreren Gebilden — Gerade, ebene Strahlbüschel und Ebenenbüschel — in irgend einer Ordnung genommen, der Reihe nach jedes mit dem darauf folgenden [113] projectivisch ist, so ist jedes mit jedem projectivisch.«

VI. Da man die Flächenwinkel zweier projectivischen Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ durch zwei ebene Strahlbüschel B, B_1 darstellen kann (§ 27, II. 3), und da letztere unter sich projectivisch sind (§ IV), weil sie es mit jenen, und jene unter sich es sind, so folgt ferner (§ 9, II):

»In zwei projectivischen Ebenenbüscheln $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ befinden sich, im Allgemeinen, nur zwei entsprechende rechte Flächenwinkel $(\sigma\tau)$, $(\sigma_1\tau_1)$.«

Diese Ebenenpaare σ und σ_1, τ und τ_1 haben ferner die nachstehende Eigenthümlichkeit (§ 12, I):

$$\operatorname{tg}(\alpha\sigma)\cdot\operatorname{tg}(\alpha_1\tau_1)=\operatorname{tg}(\beta\sigma)\cdot\operatorname{tg}(\beta_1\tau_1), \text{ und}$$
$$\operatorname{tg}(\alpha\tau)\cdot\operatorname{tg}(\alpha_1\sigma_1)=\operatorname{tg}(\beta\tau)\cdot\operatorname{tg}(\beta_1\sigma_1);$$

das heisst: »Bei zwei projectivischen Ebenenbüscheln $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ ist das Produkt aus den Tangenten der Winkel, welche irgend zwei entsprechende Ebenen (α und α_1, oder β und β_1) mit den ungleichnamigen Seitenflächen (mit σ und τ_1, oder σ_1 und τ) der entsprechenden rechten Flächenwinkel einschliessen, von unveränderlichem Werth.«

31. In Hinsicht der gegenseitigen Lage zweier projectivischen Ebenenbüschel finden ähnliche Fälle und Umstände statt, wie bei den früher betrachteten Gebilden, nämlich folgende.

I. Zwei projectivische Ebenenbüschel sollen, oder ihre Lage soll »perspectivisch« heissen, wenn die Durchschnittslinien der entsprechenden Ebenenpaare einen ebenen Strahlbüschel bilden. Um sich von der Möglichkeit dieser Lage zu überzeugen, denke man sich einen beliebigen ebenen Strahlbüschel B, lege durch dessen Mittelpunkt B irgend zwei Gerade $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ (die [**114**] nicht in der Ebene B liegen), so sind die Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, in Ansehung der Ebenenpaare, welche durch denselben Strahl des Strahlbüschels B gehen, projectivisch (§ 30), und der Erklärung gemäss liegen sie perspectivisch.

Ferner soll der Strahlbüschel B, oder dessen Ebene B, der »perspectivische Durchschnitt« der Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ heissen. Insbesondere kann der Strahlbüschel B aus einem System von Parallelstrahlen bestehen, und dann sind auch die Axen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ denselben, also auch der Ebene B parallel.

Als ein wesentlicher Umstand bei der perspectivischen Lage ist noch der zu bemerken, dass offenbar zwei entsprechende Ebenen, etwa ε, ε_1, auf einander fallen (§ 9, II), nämlich in derjenigen Ebene, in welcher die beiden Axen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ der Ebenenbüschel liegen. Dieser Umstand dient umgekehrt als Merkmal, oder als Bedingung für die perspectivische Lage der beiden Ebenenbüschel; nämlich man erkennt diese Lage vornehmlich an folgenden zwei Merkmalen:

»Zwei projectivische Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ liegen allemal perspectivisch, wenn entweder:

1) irgend zwei entsprechende Ebenen ε, ε_1 auf einander fallen, oder wenn
2) die drei Durchschnittslinien von irgend drei entsprechenden Ebenenpaaren in einer und derselben Ebene liegen.«

Die Richtigkeit dieser Aussagen ist durch Hülfe früherer Sätze leicht zu erweisen. Denn im ersten Falle (1) liegen die Axen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ in der den Ebenenbüscheln gemeinschaftlichen Ebene $\varepsilon\varepsilon_1$, und müssen folglich einander in irgend einem Punkte B schneiden, oder insbesondere parallel sein. Daher muss ferner der Durchschnitt je zweier entsprechenden Ebenen durch [**115**] den Punkt B gehen, weil offenbar beide Ebenen durch denselben gehen. Legt man nun durch zwei solche Durchschnitte, etwa durch a, b, d. h., durch die Durchschnitte der entsprechenden Ebenenpaare α und α_1, β und β_1, eine Ebene B, so wird diese der Ebene $\varepsilon\varepsilon_1$ in einem bestimmten Strahl ee_1 begegnen und die Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ in zwei Strahlbüscheln B, B_1 schneiden, welche projectivisch sind, und zwar, da sie die drei Strahlen a, b, ee_1, als sich selbst entsprechende Strahlen, gemein haben, projectivisch gleich sind und sich decken, so dass folglich alle übrigen Durchschnitte entsprechender Ebenenpaare in der genannten Ebene B liegen. Sind insbesondere die Axen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ parallel, so ist auch die Ebene B mit ihnen parallel. Im andern Falle (2) muss die Ebene, in welcher die drei Durchschnittslinien liegen, die Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ in zwei ebenen Strahlbüscheln B, B_1 schneiden, die projectivisch gleich sind und sich decken, weil sie die drei genannten Strahlen gemein haben und durch dieselben bestimmt werden, woraus denn folgt, dass die Durchschnittslinie von je zwei entsprechenden Ebenen in jene Ebene BB_1 fallen muss.

Sind insbesondere die Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ gleich, d. h., sind je zwei entsprechende Flächenwinkel derselben einander gleich, so giebt sich diese Eigenschaft bei der perspectivischen Lage der Gebilde durch folgende Umstände kund, nämlich entweder:

a) hälftet der perspectivische Durchschnitt B den von den Axen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ eingeschlossenen Winkel und steht auf dessen Ebene senkrecht, oder
b) ist der perspectivische Durchschnitt B unendlich weit entfernt, so dass je zwei entsprechende Ebenen der Ebenenbüschel parallel sind,

[116] und umgekehrt, durch jeden dieser Umstände ist die Gleichheit der Ebenenbüschel bedingt. Sind im ersten Falle (a) insbesondere die Axen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ parallel, so liegen sie auf entgegengesetzten Seiten des perspectivischen Durchschnitts B und sind gleich weit von ihm entfernt.[10]

II. Ist die Lage der Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ nicht perspectivisch (I), so soll sie »s c h i e f« heissen. Zwei projectivische Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ befinden sich allemal in s c h i e f e r Lage, wenn entweder (I):

1) ihre Axen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ nicht in einer Ebene liegen, oder
2) wenn drei Durchschnittslinien von irgend drei entsprechenden Ebenenpaaren nicht in einer Ebene liegen, oder

3) wenn ihre Axen in einer Ebene liegen, in der aber nicht zwei entsprechende Ebenen (ε, ε_1) vereinigt sind.

Im Allgemeinen sind bei der schiefen Lage zweier projectivischen Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ folgende zwei Hauptfälle zu unterscheiden, nämlich entweder liegen ihre Axen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$

a) in einer Ebene, oder
b) nicht in einer Ebene.

Im Falle (a) müssen nothwendiger Weise die Axen sich in einem Punkte schneiden, der D heissen mag, und da jede Ebene durch denselben geht, so geht folglich auch die Durchschnittslinie von je zwei entsprechenden Ebenen durch denselben. Insbesondere können die Axen sammt den genannten Durchschnittslinien parallel sein.

Im Falle (b) gehen die Durchschnittslinien der entsprechenden Ebenenpaare nicht mehr durch einen und denselben Punkt, wohl aber schneidet jede die beiden Axen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ und alle sind einem **[117]** gemeinsamen Gesetze unterworfen, welches im dritten Kapitel näher untersucht werden soll.[11)]

Die Aufgabe: »Wenn bei zwei schiefliegenden projectivischen Ebenenbüscheln drei Paar entsprechender Ebenen gegeben sind, andere entsprechende Ebenenpaare zu finden, oder mit anderen Worten, die Ebenenbüschel schief aufeinander zu projiciren;« ist in beiden Fällen (a, b) leicht zu lösen, nämlich dadurch, dass man Gerade oder ebene Strahlbüschel zu Hülfe nimmt und sofort auf ähnliche Weise verfährt, wie in (§ 24, III). Im Falle (a) bedarf man nur einer einzigen Geraden als Hülfslinie, die nämlich drei Durchschnittslinien von irgend drei entsprechenden Ebenenpaaren schneidet (§ 51).

Ferner ist die Aufgabe: »Zwei schiefliegende projectivische Ebenenbüschel in perspectivische Lage zu bringen;« zufolge der mit der perspectivischen Lage verbundenen Umstände (I) leicht zu lösen.[12)]

III. Zwei projectivische Ebenenbüschel können endlich auch so liegen, dass man ihre Lage sowohl für perspectivisch als schief halten kann, wenn nämlich ihre Axen zusammenfallen (vergl. § 16). In diesem Falle finden ganz ähnliche Umstände statt, wie bei zwei auf einander gelegten projectivischen Geraden, oder bei zwei in einer Ebene liegenden concentrischen projectivischen ebenen Strahlbüscheln (§ 16, III); denn schneidet man z. B. die gegebenen Ebenenbüschel

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ mit irgend einer Ebene, so entstehen zwei ebene Strahlbüschel B, B_1, welche die angegebenen Bedingungen erfüllen. Daher werden bei den Ebenenbüscheln $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ im Allgemeinen zwei Paar entsprechende Ebenen aufeinander fallen, u. s. w. Und daher wird [**118**] man diese vereinigten entsprechenden Ebenenpaare nach (§ 17) leicht finden.

Sätze und Porismen durch Zusammenstellung projectivischer Gebilde.

32. Durch die bisherigen Betrachtungen sind die Fundamentalsätze über projectivische Gerade, ebene Strahlbüschel und Ebenenbüschel im Raume entwickelt worden. Die weitere Betrachtung könnte sich nun mit verschiedenen Verbindungen und Zusammenstellungen der genannten Gebilde beschäftigen, wobei die gefundenen Sätze, durch Wiederholung und Verbindung, zu zusammengesetzteren Sätzen führen würden, auf ähnliche Weise wie im ersten Kapitel von (§ 19) bis zu Ende. Allein ich werde mich hier nur auf einige wenige Verbindungen beschränken, und am Schlusse in zwei Anmerkungen zwei Reihen von leicht auszuführenden Betrachtungen kurz andeuten.

Den obigen, in (§ 22) aufgestellten, Sätzen entsprechen hier folgende, von deren Richtigkeit man sich mittels vorhergehender erwiesener Eigenschaften leicht überzeugen wird.

I. »*Wenn von n Geraden A, A_1, A_2, ... A_{n-1}, die durch denselben Punkt gehen (aber sonst beliebig liegen), der Reihe nach jede mit der darauf folgenden projectivisch ist, und mit ihr perspectivisch liegt, so sind je zwei projectivisch und liegen perspectivisch.*«

II. »*Wenn drei projectivische Gerade A, A_1, A_2, durch denselben Punkt gehen, und wenn darin drei* [**119**] *entsprechende Punkte* ($\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$) *vereinigt sind, so dass je zwei Gerade perspectivisch liegen, so liegen die drei Projectionspunkte* (B, B_1, B_2) *die ihnen, paarweise genommen, zugehören, in einer Geraden $\mathfrak{A}$, oder so sind sie mit einem bestimmten Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$ perspectivisch* (§ 27, III), d. h., *die Ebenen α,*

I. »*Wenn von n Ebenenbüscheln $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, ... $\mathfrak{A}_{n-1}$, deren Axen in derselben Ebene liegen, der Reihe nach jeder mit dem darauf folgenden projectivisch ist, und mit ihm perspectivisch liegt, so sind je zwei projectivisch und liegen perspectivisch.*«

II. »*Wenn die Axen dreier projectivischen Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ in einer Ebene liegen, und wenn in* [**119**] *dieser drei entsprechende Ebenen* (ε, ε_1, ε_2) *vereinigt sind, so dass je zwei Ebenenbüschel perspectivisch liegen, so schneiden sich die drei perspectivischen Durchschnitte* (B, B_1, B_2), *die ihnen zugehören, in einer Geraden A, oder so sind sie zugleich mit einer bestimmten Geraden A perspectivisch* (§ 27, III), d. h. *die*

$\beta, \ldots$, welche durch je drei entsprechende Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1\, \mathfrak{a}_2$; $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1\, \mathfrak{b}_2$; ... der Geraden bestimmt werden, bilden einen Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$.«[13])

Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$, in welchen je drei entsprechende Ebenen $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$; $\beta, \beta_1, \beta_2, \ldots$ der Ebenenbüschel sich schneiden, liegen in einer Geraden A.«[14])

III. »*Wenn vier projectivische Gerade A, A_1, A_2, A_3 sich in einem Punkte schneiden, und wenn alle unter einander perspectivisch sind, so liegen von den ihnen zugehörigen sechs Projectionspunkten vier mal drei in einer Geraden, und folglich liegen alle sechs in einer Ebene, und folglich liegen vier entsprechende Punkte, etwa $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{b}_3$, in dieser Ebene.«*[15])

III. »*Wenn vier projectivische Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, deren Axen in einer Ebene liegen, unter einander perspectivisch sind, so schneiden sich von den ihnen zugehörigen sechs perspectivischen Durchschnitten vier mal drei in einer Geraden, und folglich schneiden sich alle sechs in einem Punkte, und folglich schneiden sich vier entsprechende Ebenen, etwa β, β_1, β_2, β_3, in diesem Punkte.«*[16])

IV. »*Bewegen sich n Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_{n-1}$ nach der Reihe in n beliebigen festen Geraden $A, A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$, die durch denselben Punkt gehen, und drehen sich die n—1 Geraden $(a, a_1, a_2 \ldots a_{n-2})$, welche durch die Punktenpaare $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2, \ldots$ [120] $\mathfrak{a}_{n-2}\, \mathfrak{a}_{n-1}$ gehen, nach der Reihe um n—1 feste Punkte $(B, B_1, B_2, \ldots B_{n-2})$, so dreht sich die Gerade durch je zwei jener Punkte $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots)$ um einen festen Punkt.«*

IV. »*Drehen sich n Ebenen $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$ nach der Reihe um n beliebige feste Gerade $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots \mathfrak{A}_{n-1}$, die in einer Ebene liegen, und bewegen sich die n—1 Durchschnittslinien $(a, a_1, a_2, \ldots a_{n-2})$ der Ebenenpaare α* und *α_1, α_1* und *$\alpha_2, \ldots$ [120] α_{n-2}* und *α_{n-1}, nach der Reihe in n—1 festen Ebenen $(B, B_1, B_2, \ldots B_{n-2})$, so bewegt sich die Durchschnittslinie von je zwei jener Ebenen $(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ in einer festen Ebene.«*

Das obige Porisma des *Pappus* (§ 22) ist als besonderer Fall in dem vorstehenden Satze (IV. links) enthalten, nämlich es enthält die Einschränkung, dass die gegebenen Geraden $A, A_1, \ldots A_{n-1}$ in einer Ebene liegen.

Es möge hier, als Beispiel, noch folgende Aufgabe Platz finden, welche die obige (§ 25) als besondern Fall in sich schliesst.

V. »Wenn im Raume irgend n Gerade $A, A_1, A_2 \ldots A_{n-1}$ gegeben sind, die ein schiefes n Eck (oder n Seit) bilden (d. h., jede schneidet die darauf folgende und die letzte die erste), und wenn in jeder Ebene, die durch zwei aufeinander folgende Gerade bestimmt wird, irgend ein Punkt gegeben ist, also im Ganzen n Punkte $(B, B_1, B_2, \ldots B_{n-1})$, so soll ein anderes (schiefes) n Eck beschrieben werden, dessen Seiten nach der Reihe durch diese Punkte gehen, und dessen Ecken nach der Reihe in jenen Geraden liegen.

Die Auflösung dieser Aufgabe ist der obigen (§ 25) ähnlich, so dass jeder sie ohne Schwierigkeit wird ausführen können. Ich will nur bemerken, dass die gegenwärtige Aufgabe, im Allgemeinen, zwei Auflösungen zulässt, weil die Rangordnung der gegebenen Elemente nicht verwechselt werden kann. Diese Beschränkung der Zahl der Auflösungen wird aufgehoben, wenn die Aufgabe in folgender Gestalt gegeben wird:

[121] »Sind n beliebige Ebenen B, B_1, $B_2, \ldots B_{n-1}$ und in jeder irgend ein Punkt, also n Punkte B, B_1, $B_2, \ldots B_{n-1}$, gegeben, so sollen n andere Ebenen α, α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}$ so gelegt werden, dass sie nach der Reihe durch die Seiten des durch jene Punkte bestimmten schiefen n Ecks gehen, und dass die n Durchschnittslinien der aufeinander folgenden Ebenen in jenen gegebenen Ebenen liegen.«

Erste Anmerkung.

Von projectivischen Gebilden, die in einem Strahlbüschel im Raume liegen.

33. Zum Schlusse dieses Kapitels ist noch eine besondere Zusammenstellung von projectivischen Gebilden, und zwar von ebenen Strahlbüscheln und Ebenenbüscheln näher ins Auge zu fassen, nämlich diejenige Zusammenstellung, bei welcher die genannten Gebilde sämmtlich zu einem Strahlbüschel im Raume gehören (§ 1, V), d. h., bei dieser Zusammenstellung haben alle ebenen Strahlbüschel einen und denselben Mittelpunkt und die Axen aller Ebenenbüschel gehen durch diesen nämlichen Punkt, welcher Mittelpunkt des Strahlbüschels im Raume heisst und durch D bezeichnet werden soll.

Unter diesen Umständen finden offenbar zwischen projectivischen ebenen Strahlbüscheln und Ebenenbüscheln, die in demselben Strahlbüschel D liegen, durchweg ähnliche Beziehungen statt, wie zwischen projectivischen Geraden und ebenen Strahlbüscheln, die in derselben Ebene liegen und wovon das erste Kapitel handelt. Denn wird der Strahlbüschel D durch irgend eine Ebene, die E heissen mag, geschnitten, so wird jeder Ebenenbüschel in [122] einem ebenen Strahlbüschel, jeder ebene Strahlbüschel in einer Geraden, und jeder Strahl in einem Punkt geschnitten; nun können alle diese durch den Durchschnitt erzeugten Gebilde in der Ebene E als perspectivisch mit den ihnen zugehörigen Gebilden im Strahlbüschel D angesehen werden (§ 27, III), und alsdann werden, wenn irgend zwei Gebilde in der Ebene E projectivisch sind, auch die ihnen entsprechenden Gebilde im Strahlbüschel D projectivisch sein (§ 30, IV), und auch umgekehrt; daher werden fast alle Gesetze, Eigenschaften, Lehrsätze, Porismen, Aufgaben, u. s. w., die bei projectivischen Gebilden in der Ebene E stattfinden, auch auf ähnliche Weise bei den ihnen entsprechenden Gebilden im Strahlbüschel D statt haben, so dass nur einzelne besondere Eigenschaften und Umstände hierbei eine Ausnahme machen.

Demnach würden alle Untersuchungen, die im ersten Kapitel über Gebilde in der Ebene E durchgeführt worden, auf entsprechende Weise bei den Gebilden im Strahlbüschel D auszuführen sein; da aber diese Untersuchung, im Grunde genommen, nichts wesentlich Neues enthielte, weil sie, wie wir eben gesehen, unmittelbar aus der Untersuchung in der Ebene E abgeleitet, oder auf dieselbe zurückgeführt werden kann, so werde ich mich hier nicht länger damit aufhalten, indem es durchaus nicht schwierig ist, bei jedem vorkommenden Falle, nach den bereits gegebenen Andeutungen, sich zurecht zu finden. Ich will nur noch erinnern, dass die Figuren in der Ebene E mit den ihnen entsprechenden Figuren im Strahlbüschel D auf gewisse Weise übereinstimmen, d. h., einem Vieleck in E entspricht ein gleichnamiger Körperwinkel in D, z. B. dem Dreieck entspricht ein dreikantiger oder dreiflächiger Körperwinkel, dem Viereck [**123**] entspricht ein vierkantiger Körperwinkel, u. s. w., und dem Kreise entspricht ein Kegel (zweiten Grades).

Als ein zweckmässiges Beispiel zur Erläuterung des Gesagten mag folgende Aufgabe dienen.

»Wenn zwei projectivische ebene Strahlbüschel B_1, B_2 in einem Strahlbüschel D perspectivisch liegen, so dass zwei entsprechende Strahlen e, e_1 vereinigt sind (§ 28), und man denkt sich den einen Strahlbüschel fest, während der andere sich um den gemeinschaftlichen Strahl herumbewegt, so ist die Frage, welche Fläche durch die Projectionsaxe $\mathfrak{A}$ (d. h. Axe des Ebenenbüschels, in welchem beide Strahlbüschel B, B_1 liegen (§ 28)) beschrieben werde.«

Man denke sich eine Ebene E, welche zu dem gemeinschaftlichen Strahle ee_1 senkrecht ist, so wird sie die ebenen Strahlbüschel B_1, B_2 in zwei Geraden A, A_1 schneiden, die unter sich perspectivisch sind, wie etwa (Fig. 7) sie darstellt, und der Punkt B, in welchem sie die Projectionsaxe $\mathfrak{A}$ schneidet, ist der Projectionspunkt der Geraden A, A_1. Wird nun der eine Strahlbüschel, etwa B_2, auf die angegebene Art bewegt, so wird sich die zugehörige Gerade A_1 in der Ebene E um den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt $\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1$ der Geraden drehen, und der Projectionspunkt B wird sich in einer bestimmten Kreislinie bewegen, deren Mittelpunkt $\mathfrak{r}$ ist (§ 15); daher wird die Projectionsaxe $\mathfrak{A}$ eine Kegelfläche D zweiten Grades beschreiben, die durch jenen Kreis geht, und zwar ist dieser Kegel ein schiefer, weil das aus dem Scheitel D auf die Ebene E des Kreises gefällte Loth ee_1 nicht den Mittelpunkt ($\mathfrak{r}$) des Kreises trifft. »Also beschreibt die Projectionsaxe $\mathfrak{A}$ eine schiefe Kegelfläche, die von jeder Ebene, welche zu dem [124] gemeinschaftlichen Strahle ee_1 der Strahlbüschel B_1, B_2 senkrecht ist, in einem Kreise geschnitten wird.«

Zweite Anmerkung.

Von projectivischen Gebilden auf der Kugelfläche.

34. Denkt man sich eine Kugelfläche K, die den Mittelpunkt D des vorhin zu Grunde gelegten Strahlbüschels im Raume (§ 33) zum Mittelpunkt hat, so wird dieselbe von den Gebilden, die im Strahlbüschel D liegen, wie folgt geschnitten: von jedem Strahl (a, b,...) in einem Punkt ($\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$,...); von jedem ebenen Strahlbüschel B in einem Hauptkreise (grössten Kreise) H, dessen Punkte den Strahlen, und dessen Abschnitte (Bogen) den Winkeln des Strahlbüschels entsprechen; von einem Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$ in einem sphärischen Strahlbüschel $\mathfrak{B}$, d. h., in einer unzähligen Menge von Hauptkreisen, die den Ebenen des Ebenenbüschels, und deren Winkel den Winkeln der letzteren entsprechen, und die alle durch denselben Punkt $\mathfrak{B}$ (Durchschnittspunkt der Axe $\mathfrak{A}$) gehen, welcher Mittelpunkt des sphärischen Strahlbüschels heissen soll. Werden nun irgend zwei Gebilde (H und $\mathfrak{B}$, oder H und H_1, oder $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_1$) auf der Kugelfläche K, wenn ihre entsprechenden Gebilde (B und $\mathfrak{A}$, oder B und B_1, oder $\mathfrak{A}$

und $\mathfrak{A}_1$) im Strahlbüschel D projectivisch sind, ebenfalls projectivisch genannt, so folgt mit dieser Erklärung zugleich, dass die wesentlichsten projectivischen Beziehungen, welche zwischen den Gebilden im Strahlbüschel D (oder zwischen den Gebilden in der Ebene E (§ 33)) stattfinden, auch zwischen den Gebilden auf der Kugelfläche K statthaben müssen.

Wie man hieraus sieht, sind also die Betrachtungen [125] auf der Kugelfläche K durchaus nichts eigenthümlich Neues, sondern sie sind nur als eine besondere Beschränkung der Betrachtungen im Strahlbüschel D anzusehen. Ueberhaupt haben Untersuchungen auf der Kugelfläche selten die Wichtigkeit, die man ihnen, vermöge einer oberflächlichen Ansicht, beizulegen geneigt ist. Denn oft lassen sich dieselben aus entsprechenden Untersuchungen im Strahlbüschel D oder in der Ebene E ableiten, und viele derselben liessen sich dann auch auf ähnliche Weise auf andere krumme Flächen übertragen. Ueber die Art und Weise, wie, im Allgemeinen, Operationen (Constructionen) auf der Kugelfläche ausgeführt werden können, werde ich später handeln. Man kann nämlich die Kugelfläche allein als Operationsfeld annehmen, oder man kann die entsprechenden Operationen im Strahlbüschel D, oder in irgend einer Ebene E ausführen, und sodann auf die Kugelfläche K übertragen. Finge man mit der Construction auf der Kugelfläche K an, so liessen sich umgekehrt die gefundenen Resultate auf den Strahlbüschel D oder auf die Ebene E übertragen, welches aber nicht der zweckmässige Gang sein möchte.

Ueber die Betrachtung projectivischer Gebilde auf der Kugelfläche will ich nur noch bemerken, dass nur wenige von den Eigenschaften, die im ersten Kapitel an projectivischen Gebilden in der Ebene nachgewiesen werden, nicht auch auf entsprechende Weise bei jenen sich vorfinden; zu solcher Ausnahme gehören z. B. der Parallelismus der Geraden, und ihre unendlich entfernten Punkte. Dagegen sind die Eigenschaften, welche auf die projectivische Beziehung gegründet sind, auf ähnliche Weise vorhanden, wie in der Ebene E, oder wie im Strahlbüschel D. Denn da offenbar die Abschnitte (Bogen) eines Hauptkreises H gerade das Maass [126] der ihnen entsprechenden (gegenüber stehenden) Winkel des zugehörigen ebenen Strahlbüschels B sind, und da die Winkel, welche die Strahlen eines sphärischen Strahlbüschels $\mathfrak{B}$ mit einander bilden, offenbar die nämlichen sind, welche die ihnen entsprechenden Ebenen im zugehörigen Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$ einschliessen, so muss folglich auch bei projectivischen Gebilden auf der Kugelfläche Gleichheit der Doppelverhältnisse stattfinden, wenn dazu, bei Hauptkreisen die Sinus der Bogen, und bei Strahlbüscheln ($\mathfrak{B}$) die Sinus der von den Strahlen eingeschlossenen Winkel, genommen werden. Daher folgt z. B.: »dass es 1) bei zwei projectivischen Hauptkreisen H, H_1 zwei entsprechende Abschnitte (Bogen) giebt, die Quadranten sind; 2) dass es bei zwei projectivischen sphärischen Strahlbüscheln $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$ zwei entsprechende rechte Winkel giebt; und 3) dass es bei einem Hauptkreise H und einem Strahlbüschel $\mathfrak{B}$, die projectivisch sind, einen Quadranten und einen rechten Winkel giebt, die sich entsprechen; und dass in Bezug auf diese eigenthümlichen Elemente dasselbe Gesetz stattfindet, wie bei projectivischen Strahlbüscheln B, B_1 in der Ebene (§ 12, I, δ, δ_1), oder wie bei projectivischen Ebenenbüscheln $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ (§ 30, V).« Ferner ist bei projectivischen sphärischen Gebilden perspectivische und schiefe Lage zu unterscheiden, bei der ersteren haben zwei Hauptkreise einen Projectionspunkt, und zwei Strahlbüschel haben einen perspectivischen Durchschnitt. Aus dem obigen Beispiel (§ 33) folgt hier der nachstehende Satz: »Wenn zwei projectivische Hauptkreise H, H_1 perspectivisch liegen und wenn der eine fest bleibt, während der andere sich um ihren [127] gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt herumbewegt, so bewegt sich der Projectionspunkt in einem sphärischen Kegelschnitt (d. i. der Durchschnitt eines Kegels zweiten Grades, dessen Scheitel im Mittelpunkt der Kugel liegt, mit der Kugelfläche).« — Werden zwei gleichartige projectivische sphärische Gebilde (H und H_1, oder $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_1$) aufeinander gelegt, so finden dabei ähnliche Umstände statt, wie bei den entsprechenden Betrachtungen in (§ 16 und § 31, III); ferner kann dabei eine entsprechende Aufgabe gestellt, und auf ähnliche einfache Weise (mittelst eines Kreises oder irgend eines sphärischen Kegelschnitts) gelöst werden, wie in (§ 17), welche sodann eine eben so fruchtbare Anwendung findet, wie die letztere bei den nach ihr folgenden Betrachtungen u. s. w.

Anmerkungen

des Herausgebers.

Wir bringen in zwei auf einander folgenden Heften den Hauptheil des berühmten Werkes von *Jacob Steiner*: »Die Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander«. Sie umfassen die §§ 1—34 und 35—60. In Betreff der näheren Umstände und der Zeit der Abfassung dieses klassischen Werkes, sowie einiger biographischer Notizen verweisen wir auf das Heft Nr. 60 der Klassiker.

Steiner's synthetische Geometrie ist heutzutage in dem Maasse gerühmt und allgemein gewürdigt, dass wir uns eines jeden empfehlenden Wortes enthalten können, und doch haben wir eines ganz besonderen Umstandes Erwähnung zu thun. Es wird allgemein zugestanden, dass das fragliche Gebiet, so lange die Betrachtungen sich auf die Ebene beziehen, in hohem Grade geeignet sind für den mündlichen Vortrag. Die Zuhörer, die ausharren, folgen im Ganzen leicht, besonders wenn sie die Energie haben, nicht während des Vortrages nachzuschreiben, sondern unmittelbar nach demselben frei aus dem Gedächtniss ihr Concept abzufassen. Sobald aber der Docent es wagt, die synthetische Geometrie des Raumes vorzutragen, wird er bald die Erfahrung machen, dass selbst die besten Köpfe unter den Zuhörern nicht mehr folgen können. Das fragliche Gebiet ist zwar gar nicht schwerer vorzutragen, der Lehrer hat ja seine Bilder und Vorstellungen im Kopf und braucht nur den geeigneten Ausdruck zu suchen; ganz anders ist die geistige Thätigkeit des Schülers beschaffen, sofern er nach den Worten des Vortrages die Bilder zu construiren hat. Solches wird ihm nicht schwer bei Gebilden in der Ebene, weil die Zeichnung vorliegt, er mithin bei jeder Abschweifung die Gedanken leicht zurücklenkt und sich den Zusammenhang wieder beschaffen kann. Anders bei Gebilden im Raume, und es liegt die Frage nahe, ob die Sätze nicht in ähnlicher Weise durch Zeichnung von Figuren bildlich dargestellt werden können. *Steiner* selbst hält solches (s. S. 82) erstens für »nicht leicht ausführbar« und zweitens für »gefährlich«, weil es zu »schwerfälliger Auffassung« führen solle.

Sollte nicht vielleicht der erstgenannte Grund der allein maassgebende gewesen sein? In der That hat *Steiner* fast alle Zeichnungen für die räumliche Geometrie vermieden und die wenigen, die er bringt, sind dürftig. Die unter 2 ausgesprochene Gefahr ist nämlich gar nicht vorhanden, schon deshalb nicht, weil das »gesunde, kräftige Vorstellungsvermögen«, das *Steiner* verlangt, ohnehin lebensthätig und rege erhalten werden muss, da es undenkbar ist, alle die zahlreichen Lehrsätze mit Figuren zu illustriren. In der That scheint ein Moment bei der synthetischen Geometrie bisher stark vernachlässigt worden zu sein, nämlich die streng perspectivische Zeichnung der Gebilde, die doch wahrlich dem ganzen Gegenstande so wesenhaft nahe steht, wie keine andere Lehre. Wie viele Docenten der synthetischen Geometrie mögen wohl im Stande sein, eine correcte perspectivische Zeichnung anzufertigen? Es scheint, dass sogar *Steiner* selbst sich nicht damit befasst hat, was insofern bedauerlich erscheint, als er ein Meister in genauem Planzeichnen war. Unter der strengen Zucht der Gesetze perspectivischen Zeichnens kann man eher das Gegentheil der ersten These behaupten: es ist in der That unter der eben genannten Bedingung, die freilich ein eigenes tieferes Studium erfordert, nicht schwer, alle Lehren der synthetischen Geometrie des Raumes durch Construction der entsprechenden Figuren zu beleben. Ja es scheint, als könnten diese Lehren nur auf diesem Wege aufs Katheder gebracht werden. Zudem wird durch richtige räumliche Darstellung in Figuren weder dem Lehrer noch dem Schüler auch nur das Geringste an Anstrengung erspart. Der Vortrag aber dieses Gebietes wird eben durch diese Methode allein erst ermöglicht. Freilich ist es ja oft sehr mühsam die Figuren herzustellen, wer wird denn aber auch erwarten, dass sie an Einfachheit denen in der Ebene gleichkommen? Der Docent muss sich stets dieselben vorher zurechtmachen, ja zuweilen muss er sie fertig mitbringen und den Weg der Construction den Schülern anzeigen, weil sich ohne Vorversuche die passende Lage aller Punkte und Linien auf der Zeichnung nicht gewinnen lässt.

In diesem Sinne wollen wir in unseren Anmerkungen zu den drei Heften einige Lehrsätze mit perspectivisch correcter Zeichnung illustriren und hoffen dadurch Anregung zu weiterer Förderung der Sache zu geben.

Aber in noch anderem Sinne vermag das perspectivische Zeichnen auch die Lehre der synthetischen Geometrie der Ebene zu beleben und zu fördern. Die Construction eines ganzen, d. h. continuirlichen Kegelschnitts ist ja sehr schwierig und ohne besondere Mechanismen nicht ausführbar. Sehr oft aber wird ein beliebiger ganzer Kegelschnitt als gegeben vorausgesetzt. In solchen Fällen kommt man auf Grund perspectivischer Zeichnung und Auffassung mit dem gewöhnlichen Cirkel aus. Man braucht eben nur eine Kreislinie hinzuzeichnen und dieselbe, je nachdem in welche Ebene des Raumes sie perspectivisch versetzt wird, als Hyperbel, Parabel, Ellipse oder Kreis aufzufassen, wofür die Zeichnung selbst entscheidende Merkmale abgiebt.

Wir dürfen es uns nicht gestatten, in diesen Anmerkungen die Grundlehren des perspectivischen Zeichnens ausführlich vorzubringen. Wir wollen nur in Kürze die Begriffe des Fluchtpunktes einer Geraden und der Fluchtlinie einer Ebene erläutern. Es soll dabei eine gewisse Erweiterung der gewöhnlichen Lehren im mathematischen Interesse — im Gegensatze zum ästhetischen — angedeutet werden. Wir wollen nämlich auf unserer Bildfläche sowohl den Raum vor uns, d. h. vor dem Beschauer, als den hinter uns abbilden, und wollen an der Zeichnung erkenntlich werden lassen, wo ein abgebildeter Punkt sich befindet. Dabei wird ein namhafter Vortheil gegenüber der gewöhnlichen planen Zeichnung sich geltend machen, sofern wir im Stande sind, die überaus wichtigen, unendlich fernen Punkte und die unendlich fernen Linien, sowohl gerade als gekrümmte, auf unserer Bildfläche darzustellen. Auf diese Weise wird schon in der ebenen Geometrie »eine gesunde, kräftige Vorstellung« im Raume geweckt.

Einleitende Bemerkungen.

a) Begriff des Bildes: Die Lehre von der Perspective hat die Aufgabe, räumliche Gestalten auf Flächen abzubilden, die gekrümmt oder eben sein können. Wir beschränken uns auf den Fall einer Abbildung auf einer Ebene. Dieselbe heisse Bildebene; sie stehe vertical, d. h. scheitelrecht. Mit dem Worte vertical wird eine Beziehung zur Person angedeutet, die von den Punkten des Raumes Strahlen empfängt. Unbeschadet der Allgemeinheit können Ausdrücke gebraucht werden, die eine Beziehung zur Gravitation verrathen. Es wird dadurch nur die Ausdrucksweise vereinfacht. Vor der Bildebene befinde sich das Auge in einem beliebigen Abstande von der Bildebene. Das Auge werde stets mit O bezeichnet und als Punkt gedacht; man denke sich nun von einem beliebigen Punkte C des Raumes einen Strahl nach O gezogen, so heisst ein solcher Strahl ein Projectionsstrahl des Punktes C.

Von allen Punkten des Raumes können nach O hin Projectionsstrahlen gezogen werden, sie bilden alle zusammen ein Strahlenbündel.

Ein einziger Strahl kann von O aus senkrecht auf die Bildebene gezogen werden, derselbe treffe dieselbe im Punkte P, dem sogenannten Hauptpunkte. Die Strecke OP heisst die Hauptdistanz. Trifft ein von c ausgehender Projectionsstrahl cO (Fig. 1, die wir als Bild im Bilde geben) die Bildfläche $abcd$ in $\mathfrak{c}$, so heisst $\mathfrak{c}$ das Bild von c. Ebenso ist $(\mathfrak{c})$ das Bild von (c). Aus der unendlich grossen Bildebene schneiden wir durch eine beliebige mathematische Linie ein Stück heraus, das wir im engeren Sinne stets das Bild nennen wollen. Die gekrümmte oder geknickte Linie $abcd$ (Fig. 1) heisse der Rahmen. Ausserhalb des Rahmens liegt die übrige Bildfläche, unbegrenzt nach allen Richtungen. Die dreifach dimensionirte Welt wird durch Projection auf das zweifach dimensionirte Bild übertragen; sie wird indess so abgebildet, dass das Bild eine räumliche Vorstellung erweckt. Auch wenn der Rahmen nicht verzeichnet ist, so entspricht diesem Begriff doch die Begrenztheit einer jeden Zeichnung.

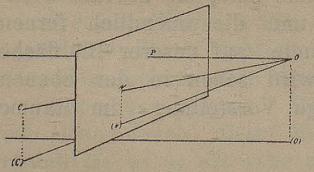


Fig. 1.

b) Projection der Unendlichkeit. Die durch den Punkt O, den Ort des Auges, gehenden Strahlen können ohne Ende nach vorn und nach hinten verlängert gedacht werden. In der realen Welt giebt es keine sichtbare Unendlichkeit. Wo auch ein Punkt reell im Weltenraume sich befinden mag, er hat stets eine endliche Entfernung von uns. Mathematisch genommen giebt es nur einen Punkt in jeder Richtung, der unendlich weit ist, weil er nur einer fingirten Position angehört und eine Richtung anzeigt. Für praktische Zwecke mag der Fixsternhimmel für unendlich weit gelten, derselbe lässt sich abbilden und vermittelt uns die Vorstellung von der Unendlichkeit und von der Möglichkeit dieselbe abzubilden. Ein jeder Stern sendet einen Projectionsstrahl aus und erhält sein Bild auf der Fläche. Die Gesammtheit aller unendlich fernen Punkte nennen wir auf dem Bilde kurz den »Himmel«. Mit Benutzung der durch die Schwere gegebenen Ausdrücke nennen wir ferner Ebenen und Linien, die senkrecht zur Richtung der Schwere stehen, horizontal. Eine horizontale Ebene kann durch das Auge hindurchgelegt werden; dieselbe schneidet die Bildebene in einer horizontalen Linie, die wir Horizont nennen. Vom Punkte O im Raume können nach allen Punkten des Horizontes Projectionsstrahlen unendlich weit nach vorn verlängert gedacht werden. Die Horizontalebene, unendlich erweitert, weist nach einer unendlich fernen Linie hin. Offenbar ist der Horizont auch das Bild dieser unendlich fernen Punkte. In diesem Sinne soll das Wort Horizont stets gebraucht werden. Das Loth OP liegt in der Horizontebene. Mithin liegt auch der Hauptpunkt P stets im Horizont.

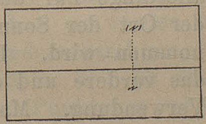


Fig. 2.

Wenn Himmel und Horizont Benennungen für Punkte und Stellen des Bildes sind, so entsprechen denselben im Raume Punkte »der unendlichen Ferne«.

Der Horizont theilt unseren Himmel in zwei Theile, die wir Ober- und Unterhimmel nennen wollen. Der Horizont kann übrigens auch ausserhalb des Rahmens liegen, ebenso wie der Hauptpunkt P, denn der Rahmen ist ein beliebiger Ausschnitt der unendlich grossen Bildebene. Gewöhnlich findet man aber beide auf dem Bilde.

Das Bild im Rahmen bringt nur einen Theil der unendlichen Ferne zur Abbildung, denn dem Rahmen selbst entspricht ein Projectionsstrahlenkegel, der nach einer continuirlichen Punktenreihe im Unendlichen hinweist. Der von diesem Strahlenkegel eingeschlossene Raum heisse das Gesichtsfeld. Je kürzer PO, um so grösser das Gesichtsfeld, um so eher kann das Bild ausserhalb des Rahmens entbehrt werden.

Aber nicht nur der Himmel vor dem Beschauer wird projicirt. Wir denken uns von jedem Punkte der unendlichen Ferne hinter uns einen Projectionsstrahl durch O hindurch und verlängern ihn nach vorne, bis er das Bild trifft, und erhalten so den Rückenhimmel auf unserem Bilde, dessen Gesichtsfeld genau eben so gross wie das des vorderen Raumes ist. Die unendliche Ferne im Rücken wird auch durch die Horizontalebene getheilt. Wir können sogleich auf den unteren Theil der unendlichen Ferne, sowohl hinter als vor uns verzichten, denn es bleibt auf dem Bilde der Himmel unter dem Horizont als Bild der unendlichen oberen Ferne im Rücken, die identisch ist mit der vorderen unteren Unendlichkeit. Im Interesse der mathematischen wie der ästhetischen Verwendung der perspectivischen Lehren ist die Projection des im Rücken befindlichen Raumes von Bedeutung, im Gebiete der Kunst allerdings nur das Bild der unendlichen Ferne, insbesondere der Ort der Sonne, wenn sie hinter dem Beschauer angenommen wird. In der mathematischen Verwendung ist das vordere und das hintere Gesichtsfeld von völlig gleicher Verwendung. Mathematisch genommen ist die unendliche Ferne, vorne oben, und hinten unten, völlig identisch, ebenso vorne unten, und hinten oben, weil ein Projectionsstrahl vorn und hinten ein und denselben Punkt im Unendlichen zugleich trifft, in Folge der fingirten Position für einen Strahl, der gar kein Ende erreicht, aber durch seine Richtung nach einem Punkte hinweist, dessen Bild vor uns steht.

c) Projection von Horizontalebenen, das Terrain. Denkt man sich eine Ebene im Raume, die durch das Auge O geht, so schneidet dieselbe, wie erwähnt, die Bildfläche in einer unendlich langen Linie. Alle von Punkten dieser Ebene ausgehenden Projectionsstrahlen liegen in derselben Ebene. Daher die Bilder aller dieser Punkte sich überdecken und in die genannte Durchschnittslinie des Bildes fallen. Unter allen Ebenen, die durch O hindurchgehen, ist eine einzige senkrecht zur Richtung der Schwere; sie hiess Horizontebene und schnitt das Bild in einer geraden Linie, die wir Horizont nannten. Denkt man sich im Raume eine beliebige Ebene, die aber nicht durch O geht, so kann von jedem Punkte derselben ein Projectionsstrahl nach O gehen, der einen Bildpunkt auf der Bildfläche erzeugt. Jedem anderen Punkte der gedachten Ebene entspricht ein anderer Bildpunkt. Kehren wir zur Horizontalebene zurück, die durch O hindurchgelegt wurde, und senken diese Ebene in Gedanken. Dabei bleibe sie sich selbst parallel, also stets senkrecht zur Richtung der Schwere. Alle solche Ebenen heissen Horizontalebenen, während nur eine derselben Horizontebene genannt wurde, diejenige nämlich, die durch O hindurchging.

Bei der allmählichen Senkung halten wir plötzlich inne und zwar auf derjenigen Stelle, wo die Ebene gerade unter den Füssen des Beschauers hinstreicht. Diese Ebene heisse die Fussebene. Die Füsse des Beschauers wollen wir aber sogleich idealisiren, indem wir über die Länge des Beschauers gar nichts aussagen; wir behalten den bequemen Namen »Fussebene« bei, wie lang auch der Beschauer sein, oder wie hoch er über der Fussebene stehen mag.

Von jedem Punkte der Fussebene geht ein Projectionsstrahl durch O und erzeugt einen Bildpunkt auf der Bildfläche. Da unsere horizontale Ebene sich nur um eine endliche Strecke unter die Horizontebene gesenkt hat, so werden die aus der unendlichen Ferne herankommenden Strahlen das Bild immer noch im Horizonte treffen, m. a. W.: Es muss das Auge in O, um die unendlich fernen Punkte zu sehen, den Blick parallel der betrachteten horizontalen Ebene hinschweifen lassen, mithin den Horizont treffen.

Das Bild aller Punkte der Fussebene heisse das »Terrain«. Bildpunkte, die im Raume in der Fussebene liegen, sollen dadurch erkannt werden, dass man sie stets mit eingeklammerten Buchstaben bezeichnet. Die Fussebene reicht vorne bis in die Unendlichkeit, mithin reicht auch das Terrain vorne nur bis zum Horizont. Zudem kann man noch das Terrain innerhalb des Rahmens und ausserhalb desselben unterscheiden. Am Rahmen, unten, verschwindet die Fussebene aus dem Gesichtsfelde. Ihre Projectionsstrahlen fallen unterhalb des Rahmens, und je näher der Punkt in der Fussebene sich den Füssen des Beschauers nähert, um so weiter entfernt sich der entsprechende Terrainpunkt nach unten, um beim Fusse angelangt in der Unendlichkeit auf der Bildfläche zu verschwinden. Aber die Fussebene erstreckt sich unter den Füssen des Beschauers weiter nach hinten bis in die Unendlichkeit. Auch dieser Theil der Fussebene soll projicirt werden; das entsprechende Terrain liegt auf dem Bilde offenbar *über* dem Horizonte, daher unterscheiden wir auf dem Bilde zwei Terraintheile, das *untere*, welches bis zum Horizonte reicht, und das *obere*, welches wir *Rückenterrain* nennen. Entfernt sich ein Punkt hinter dem Beschauer ins Unendliche, so rückt der entsprechende Terrainpunkt auf dem Bilde von oben her hinunter bis zum Horizonte, wie solches Fig. 3 erläutert. Wie man sieht, entspricht das Rückenterrain, über dem Horizonte, allen Punkten der Fussebene *hinter* dem Beschauer. Die Zeichnung stellt das Bild im Bilde dar. Zwei Punkte fallen aus dem Rahmen $ABCD$, und drei Punkte aus dem Rahmen $abcd$ heraus.

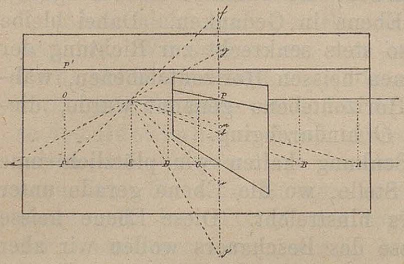


Fig. 3.

d) *Projection von Verticalebenen.* Eine durch das Auge gelegte Verticalebene wird durch eine einzelne Linie abgebildet, die senkrecht steht zum Horizonte. Wir nennen sie die *Stathme*. Jede andere Verticalebene wird offenbar Bildpunkte auf der *ganzen* Bildfläche geben, denn lassen wir die Verticalebene weiter, etwa nach rechts rücken, so erhalten wir von der *vorderen* Seite der Ebene stets Bildpunkte auf der *rechten* Seite, insbesondere aber bleibt die Flucht *unverändert*, es ist die Stathme. Die Theile der Ebene hinter dem Rücken des Beschauers werden auf der linken Seite der Bildfläche auftreten. Man erkennt leicht, dass Alles, was vorhin über den Horizont und das Terrain gesagt worden ist, sich auch auf die Stathme und ihre beiden Nachbargebiete bezieht, nur um 90° ist die Richtung verändert.

e) *Darstellung von beliebigen Punkten, Geraden und Ebenen.* Einen Punkt im Raume pflegt man sonst durch drei Coordinaten zu bestimmen. Dazu ist die Festsetzung zweier Richtungen nöthig und die Annahme eines Anfangspunktes der Coordinaten. Letzteres wird in der perspectivischen Darstellung ersetzt durch Orientirung des Beschauers vor der senkrechten Bildfläche, in welcher Terrain-punkte (mit eingeklammerten Buchstaben) eine Festlegung jedes Punktes gestatten. Es sei irgendwo im Raume ein Punkt gedacht, so kann von demselben eine Senkrechte auf die Fussebene herabgelassen werden. Durch dieses Loth und den Punkt O geht ein Stück einer verticalen Ebene, die die Bildfläche in einer verticalen Strecke schneidet. Wir wollen beliebige Punkte mit deutschen Buchstaben bezeichnen. Den Terrainpunkt nennen wir die Spur oder in der Fussebene den Fusspunkt von a, und schreiben den Punkt $a/(a)$. Man kann vier Lagen der Punkte unterscheiden, s. Fig. 4:

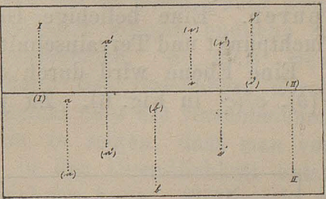


Fig. 4.

1) vorne über dem Terrain: z. B. $a/(a)$, $a'/(a')$,
2) vorne unter dem Terrain: z. B. $b/(b)$,
3) hinten über dem Terrain: z. B. $c/(c)$, $c'/(c')$,
4) hinten unter dem Terrain: z. B. $d/(d)$,

hieran schliessen wir 5) einen unendlich fernen Punkt über dem Horizont wie I/(I) und 6) einen unendlich fernen Punkt unter dem Horizonte, wie II/(II).

Bei 3 und 4 gebrauchen wir den Ausdruck »hinten«, der nicht dem Bilde, sondern der wirklichen Lage im Raume entspricht, wodurch der Leser stets wieder daran erinnert wird, dass das Terrain über dem Horizonte die hintere Seite der Fussebene abbildet. Je weiter vorn oder hinten in der Fussebene ein Punkt liegt, um so näher erscheint sein Bild am Horizont. Ein unendlich weiter Punkt hat seinen Fusspunkt unendlich fern in der Horizontebene, folglich liegt die Terrainspur im Horizonte, z. B. I/(I) und II/(II). Eine Gerade kann durch zwei beliebige Punkte bestimmt werden, wie $a/(a)$ und $b/(b)$, die Verbindung giebt die Projection der Geraden, d. h. ihr Bild. Die Verbindung der Spuren giebt die Spur der Linie. So wird leicht der unendlich ferne Punkt der Spur im Horizont gefunden. Ein Loth in diesem Punkte trifft genau den Fluchtpunkt der Geraden. In Figur 5 war $\mathfrak{a}/(\mathfrak{a})$ und $\mathfrak{b}/(\mathfrak{b})$ gegeben, es wurde die Flucht I/(I) und der Schnitt $(\mathfrak{c})$ gefunden. Es liegt der vordere Theil der unendlich langen Linie rechts von der Flucht I/(I), der hintere im Rücken des Beschauers gelegene Theil unserer Geraden ist links von I/(I) abgebildet, wie man leicht daran erkennt, dass die Spur $(\mathfrak{f})$ sich über den Horizont erhebt. Bei $(\mathfrak{c})$ wird die Fussebene durchbohrt und die Fortsetzung der Linie z. B. $\mathfrak{b}/(\mathfrak{b})$ liegt unter der Fussebene, wie solches stets leicht zu erkennen ist an der Stellung der Spuren. Eine beliebige Gerade kann insbesondere durch Fluchtpunkt und Terrainschnitt gegeben werden. (I u. $\mathfrak{c}$ Fig. 5.)

Eine Ebene wird durch drei Punkte bestimmt, wie $a/(a)$, $b/(b)$, $c/(c)$ in Fig. 6). Zu jeder der drei Seiten construire

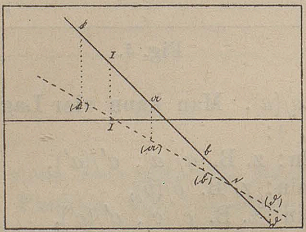


Fig. 5.

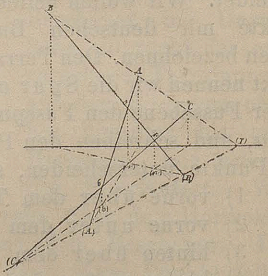


Fig. 6.

man die Fluchtpunkte, so werden die entsprechenden drei Verticalebenen dieser drei Seiten sichtbar. Offenbar müssen jetzt die drei Fluchtpunkte A, B, C in ein und derselben Geraden liegen, nämlich in der Fluchtlinie der Ebene (Lehrsatz III S. 69). Diese Fluchtlinie schneidet den Horizont im Punkte (I). Durch diesen muss der Terrainschnitt unserer Ebene hindurchgehen. Die drei Durchschnitte der Terrainlinien (A), (B), (C) liegen auch in einer Geraden, die (nach demselben Lehrsatze) der Terrainschnitt unserer Ebene ist. Eine unvermeidliche und nützliche Uebung besteht in der Annahme verschiedener Fälle für die drei Punkte und Construction der Ebenen in Flucht und Terrainschnitt; im Specialfall, wo unendlich ferne Punkte gegeben sind, ist die Construction die einfachste.

Alle einander parallelen Linien haben ein und denselben Fluchtpunkt. Ebenso haben alle einander parallelen Ebenen ein und dieselbe Fluchtlinie, denn allen einander parallelen Linien ist ein und derselbe Strahl durch O parallel. Wo dieser die Bildebene durchbohrt, da liegt der Fluchtpunkt aller jener Geraden. Ebenso ist allen einander parallelen Ebenen eine und dieselbe durch O gelegte Ebene parallel, und wo diese die Bildebene durchbohrt, da liegt die Fluchtlinie der Ebenen. Daher sind Parallelconstructionen perspectivisch die einfachsten. Jede Strecke von endlicher Länge erscheint in der Unendlichkeit als in einen Punkt zusammengeschrumpft (Fig. 3). Umgekehrt können endliche Strecken im Bilde unendlich lang erscheinen. So z. B. wenn eine Strecke im Raume die Ebene des Beschauers durchdringt. Figur 3 gestattet eine Uebersicht über die verschiedenen Fälle.

Es wird nun leicht sein zu zeigen, dass man von einer dreiseitigen Pyramide die in der Unendlichkeit entstehende Figur auf der Bildfläche zeichnen kann. Sie besteht aus den drei Fluchtlinien der Seiten der Pyramide und die Ecken dieses unendlich fernen Dreiseits sind zugleich die Fluchtpunkte der drei Kanten der Pyramide.

Gerade Linien in Ebenen, deren Fluchtlinie und Terrainschnitte gegeben sind, haben stets ihre Fluchten in irgend einem Punkte der Fluchtlinie, und ebenso ihren Terrainschnitt in jenen der Ebenen.

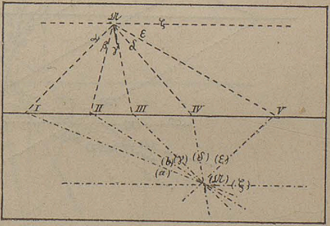


Fig. 7.

Ein Ebenenbüschel wird abgebildet durch seine Axe $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}$), und beliebige Ebenen, deren Fluchtlinien einen Strahlbüschel in $\mathfrak{A}$, und deren Terrainschnitte einen Strahlbüschel in ($\mathfrak{A}$) bilden. Beide Büschel schneiden sich mit entsprechenden Strahlen im Horizonte. Der Horizont erscheint somit als perspectivischer Durchschnitt der beiden Büschel (Fig. 7). Alle Specialfälle sind leicht zu verzeichnen und werden hier übergangen.

---

1) *Zu S. 69.* Diese wichtigen Sätze erhalten eine räumliche Deutung in der Lehre vom perspectivischen Zeichnen und man begegnet denselben bei jeder Construction, wie später erhellen wird.

2) *Zu S. 81.* Im Text steht irrthümlich die Anzahl 576 statt 144, ein Versehen *Steiner*'s, welches in seinen gesammelten Werken zurechtgestellt worden ist. Der Abschnitt in der Anmerkung (S. 82) von »Ausserdem« bis zur Formel am Schluss des Absatzes ist dort vom Herausgeber hinzugefügt.

Ferner ist dem entsprechend in dem letzten Satze derselben Anmerkung statt n überall $(n - 1)$ gesetzt, endlich ist die letzte Formel der Anmerkung berichtigt. Hiermit stimmt übrigens die Angabe der Auflösungen auf Seite 65 oben, wo die Anzahl derselben ganz richtig berechnet ist.

3) *Zu S. 84* s. Fig. 8. So einfach die Construction ausfällt, so lehrreich ist sie. Gegeben sei die Axe 𝔄 (𝔄) und

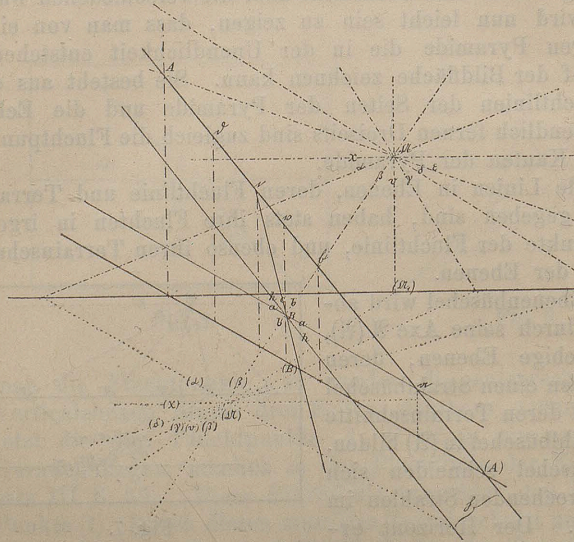


Fig. 8.

die Gerade $A(A)$. Man zeichne beliebige Ebenen des Büschels und bestimme die Durchschnitte mit der Geraden A. Zu dem Zwecke lege man die Verticalebene durch $A(A)$ in Verticalflucht und Terrainschnitt, bestimme den Durchschnitt derselben mit der gewählten Ebene und findet B. Alle Projectionsstrahlen werden nun durch B hindurchstreichen. Das Ebenenbüschel erzeugt in der Verticalebene von $A(A)$ ein Strahlbüschel mit dem Centrum in B und letzteres schneidet $A(A)$ in den gesuchten Punkten. Man findet sie, indem man den Durchschnittspunkt irgend einer Fluchtlinie und der Verticalflucht mit dem Durchschnitt der Terrainschnitte und des Terrainschnittes der Geraden $A(A)$ verbindet. Der Punkt B liegt offenbar in der Axe und zugleich in der Verticalebene von $A(A)$. Um B zu erhalten, braucht man eben nur im Schnittpunkt der Terrainschnitte ein Loth zu errichten. Wo dasselbe die Axe 𝔄(𝔄) trifft, da liegt *B*. Auch für die unzugänglichen Horizontpunkte ist die Construction möglich, denn es erscheint Büschel 𝔄 mit Büschel (𝔄) perspectivisch im Horizont, 𝔄 und *B* in der Verticalen durch *A*, (𝔄) und *B* im Terrainschnitt von *A*(*A*). Die der Geraden *A*(*A*) parallele Ebene ist $\varepsilon(\varepsilon)$. Wo liegt der Terrainschnitt derselben? Sie ist in der Figur fortgelassen. Der Horizontpunkt ist rechts nicht zugänglich, doch ist der Schnitt leicht zu construiren.

4) *Zu S. 85* s. Fig. 9. Die drei unterschiedenen Fälle sind leicht zu construiren. Der erste Fall giebt eine Figur,

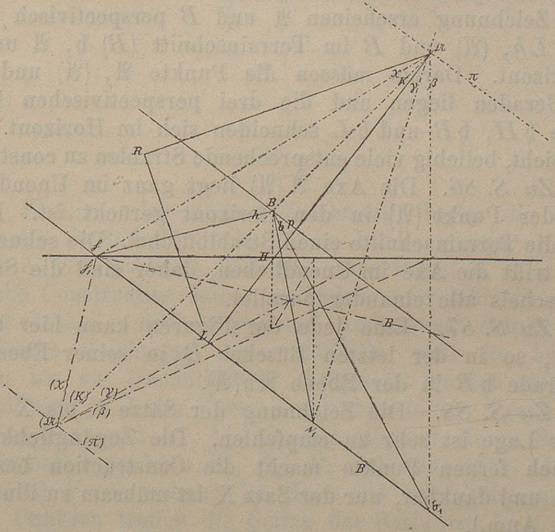


Fig. 9.

ähnlich der vorigen. Man nehme nur eine beliebige Ebene durch *A* (*A*) an, statt der dort verzeichneten Verticalebene. Im Falle 2 muss die Fluchtlinie derselben durch 𝔄 hindurchgehen. Nur im Falle 3 ist eine eingehende Berücksichtigung erforderlich: Es sei *H* der Hauptpunkt, man stelle sich das Auge *O* in einer Entfernung $= HR$ über *H* im Raume vor. Durch *O* im Raume denke man sich eine Ebene senkrecht zur Richtung *O*𝔄, so wird diese die Bildfläche in einer Geraden schneiden. Denkt man sich 𝔄*OH* als starres Dreieck, so lässt sich dasselbe auf die Bildfläche niederklappen. Dabei falle O auf R. Ein Loth in R trifft die Gerade AH im Punkte L. Ein Loth in L ist die Flucht aller Ebenen, die senkrecht stehen auf der Axe $\mathfrak{A}$ $(\mathfrak{A})$. Alle diese Ebenen haben verschiedene Terrainschnitte, die im Horizontpunkte $\mathfrak{h}$ ein Strahlbüschel bilden. Wir wählen eine beliebige Ebene aus, deren Terrainschnitt $\mathfrak{h}$ (B) sei. Diese Ebene schneidet die Axe in B, dem gesuchten Büschelcentrum, in dem sich alle Projectionsstrahlen schneiden. Ebenen α, β, γ, δ entsprechen Strahlen a, b, c, d. Die interessanten Strahlen h und p wurden in die Zeichnung aufgenommen. Die Flächenwinkel in $\mathfrak{A}$ $(\mathfrak{A})$ sind jetzt im Raume gleich den Büschelwinkeln in B. In der Zeichnung erscheinen $\mathfrak{A}$ und B perspectivisch in der Flucht Lh, $(\mathfrak{A})$ und B im Terrainschnitt (B) $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{A}$ und $(\mathfrak{A})$ im Horizont. Darum müssen die Punkte $\mathfrak{A}$, $(\mathfrak{A})$ und B in einer Geraden liegen und die drei perspectivischen Durchschnitte $\mathfrak{h}H$, $\mathfrak{h}B$ und $\mathfrak{h}L$ schneiden sich im Horizont. Jetzt ist es leicht, beliebig viele entsprechende Strahlen zu construiren.

5) *Zu S. 86.* Die Axe $\mathfrak{A}$ $(\mathfrak{A})$ liegt ganz im Unendlichen, daher der Punkt $(\mathfrak{A})$ in den Horizont gerückt ist. In ihm bilden die Terrainschnitte einen Strahlbüschel. Die schneidende Ebene trifft die Axe im Unendlichen, daher sind die Strahlen des Büschels alle einander parallel.

6) *Zu S. 87.* Eine jede der Figuren kann hier benutzt werden, so in der letzten Büschel B in seiner Ebene und die Gerade $\mathfrak{h}B$ in der Ebene $\mathfrak{A}\mathfrak{h}(\mathfrak{A})$.

7) *Zu S. 88.* Die Zeichnung der Sätze I bis X in beliebiger Lage ist sehr zu empfehlen. Die Zugänglichkeit der unendlich fernen Punkte macht die Construction besonders einfach und dankbar, nur der Satz X ist mühsam zu illustriren, (s. folg. Anm.).

8) *Zu S. 93 links*, s. Fig. 10. Die im Lehrsatz beschriebene Construction ist ausgeführt worden, aber die Hauptzüge derselben wurden fortgelassen. Die Ebene $B d d_1 d_2$ ist die vierte harmonische Ebene zu Bb, Bc und Ba und ist der Ebene Bb zugeordnet. Man bemerke noch, dass der Fusspunkt (b) der Pyramide nicht in die Construction eingreift, mithin die Zeichnung noch unendlich mannigfach gedeutet werden kann. Die Spitze b kann selbst im Rücken des Beschauers liegen, sobald der Fusspunkt (b) über dem Horizonte liegt. Wird (b) versetzt, so ändern sich stets die drei Fluchtpunkte der drei Kanten. Im Specialfall, wo (b)

im Horizonte selbst liegt, vereinigen sich die drei Fluchtpunkte in b, die Pyramide ist alsdann ein Prisma mit drei

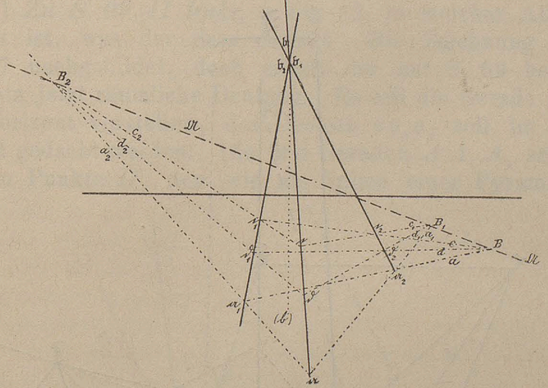


Fig. 10.

parallelen Kanten. In unserer Zeichnung liegen die Projectionspunkte B und B_1 vorn, B_2 im Rückenterrain.

9) *Zu S. 93 rechts*, s. Fig. 11. Der Punkt d ist durch gewöhnliche Construction leicht zu finden, sehr mühsam nach unserem Lehrsatz. Eine erweiterte Auffassung bringt die perspectivische Zeichnung schon deshalb, weil die beiden Pyramiden bis zur Unendlichkeit fortgesetzt werden müssen. Die Fluchtlinien je dreier Pyramidenflächen bilden zwei Dreiecke A_0, A_1, A_2 und C_0, C_1, C_2, am Himmel, deren Seiten in den Projectionspunkten B_0, B_1, B_2 sich schneiden. Letztere sind zur Vereinfachung im Horizonte angenommen. In denselben Punkten treffen die Seiten der Basis (α), (α_1), (α_2), die zugleich (γ), (γ_1), (γ_2) heissen, ein. Durch Aufsuchung der Schnittpunkte der Fluchten in 0, I, II, und der Terrainschnitte in (0), (I), (II), findet man in den drei Verbindungslinien entsprechende Schnittpunkte (die in der Figur nicht ausgezogen sind), den Schnittpunkt $\mathfrak{d}$, der zu $\mathfrak{b}$ und den beiden Spitzen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ der vierte harmonische Punkt ist. Zufällig fällt b ins Terrain ausserhalb der Zeichnung. Um die ebene Construction auszuführen, verbinde man $(\mathfrak{a})$ mit $\mathfrak{c}$, und $(\mathfrak{c})$ mit $\mathfrak{a}$ und errichte im Schnittpunkte eine Verticale; diese schneidet die Verbindungsgerade der Spitzen in demselben Punkte, der oben gefunden wurde.

Es empfiehlt sich, die Annahmen umzukehren; man kann von den Himmelsdreiecken ausgehen, deren Seiten sich im Horizont schneiden lassen u. s. w.

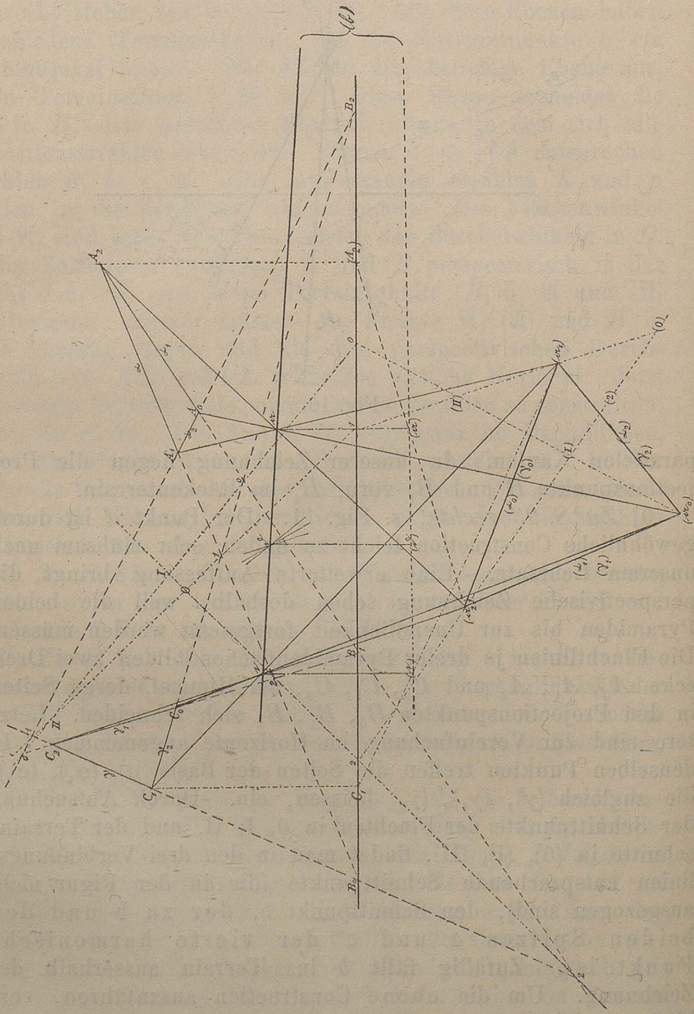


Fig. 11.

10) *Zu S. 96.* Beide Fälle sind interessant. Sie verlangen die Kenntniss der einfachsten projectivischen Winkel- und Streckenmessung.

11) *Zu S. 97.* Siehe das folgende Heft der Klassiker.

12) *Zu S. 97.* Die perspectivische Construction verlangt hier ebenfalls die Kenntniss der elementaren Winkelmessung.

13) *Zu S. 99 II links*, s. Fig. 12, in welcher Alles ausgeführt ist, was der Satz enthält. Die Zeichnung ist der Fig. 27 nachgebildet, doch erhält der auf S. 69 bewiesene Lehrsatz jetzt räumliche Deutung. Es soll die Gerade $B B_1 B_2$ den Horizont vorstellen, das Dreieck $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2$ soll im Terrain liegend gedacht werden. Die drei Geraden $A\,A_1\,A_2$ schneiden sich im Punkte D, den wir als Spitze einer Pyramide an-

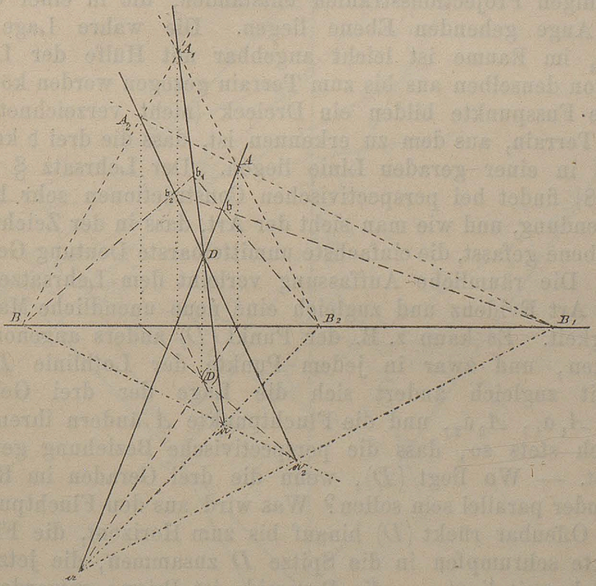


Fig. 12.

sehen; ihr Fusspunkt sei (D). Zu den drei Kanten construiren wir ihre Fluchtpunkte, indem wir aus den Durchschnittspunkten der Verbindungsgeraden $\mathfrak{a}\,D$ mit dem Horizont Lothe errichten. Da, wo diese die Geraden A treffen, verzeichnen wir die Buchstaben $A\,A_1\,A_2$; es sind das offenbar die Fluchtpunkte der drei Geraden. Da die drei Geraden $A\,A_1\,A_2$ projectivisch und je zwei perspectivisch sein sollen und die drei B ihre Projectionspunkte sind, da ferner die drei B im Horizonte liegen, so werden die entsprechenden Projectionsstrahlen stets in horizontalen Ebenen liegen. In der That erkennt man auch die Geraden $B\mathfrak{b}_1$, $B_2\mathfrak{b}_1$, $B_1\mathfrak{b}_2$ als horizontal, weil ihre Fluchtpunkte im Horizonte liegen. Das Dreieck AA_1A_2 liegt unendlich weit, weil alle drei Punkte als Fluchtpunkte unendlich weit liegen. Der Theil der Pyramide, der über dem Dreieck AA_1A_2 sich erhebt, bildet denjenigen Theil im Raume ab, der im Rücken des Beschauers liegt. In der That sind die Fusspunkte aller dieser Stellen über dem Horizonte. Die Punkte $\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2$ endlich sind durch diejenigen Projectionsstrahlen entstanden, die in einer durch das Auge gehenden Ebene liegen. Die wahre Lage von $\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2$ im Raume ist leicht angebbar mit Hülfe der Lothe, die von denselben aus bis zum Terrain gezogen werden können. Diese Fusspunkte bilden ein Dreieck (nicht verzeichnet) auf dem Terrain, aus dem zu erkennen ist, dass die drei $\mathfrak{d}$ keineswegs in einer geraden Linie liegen. Der Lehrsatz § 21, I (S. 68) findet bei perspectivischen Constructionen sehr häufig Anwendung, und wie man sieht der Art, dass in der Zeichnung, als Ebene gefasst, die einfachste unmittelbarste Deutung Geltung hat. Die räumliche Auffassung verleiht dem Lehrsatze eine neue Art Evidenz und zugleich eine neue unendliche Mannigfaltigkeit. Es kann z. B. der Punkt (D) anders angenommen werden, und zwar in jedem Punkte der Lothlinie $D(D)$. Damit zugleich ändert sich die Lage der drei Geraden $A\mathfrak{a}$, $A_1\mathfrak{a}_1$, $A_2\mathfrak{a}_2$, und die Fluchtpunkte A ändern ihren Ort, jedoch stets so, dass die perspectivische Beziehung gewahrt bleibt. — Wo liegt (D), wenn die drei Geraden im Raume einander parallel sein sollen? Was wird aus den Fluchtpunkten A? Offenbar rückt (D) hinauf bis zum Horizont, die Fluchtpunkte schrumpfen in die Spitze D zusammen, die jetzt unendlich weit liegt, — die Pyramide ist Prisma geworden.

14) *Zu S. 99 II rechts*, s. Fig. 13. Die Zeichnung zu diesem Satz fällt sehr viel complicirter aus, als beim Parallelsatz links, weil Ebenen behandelt werden. Wir wollen die Construction ausführen. Dazu nehmen wir willkürlich eine Ebene an, die durch Fluchtlinie EE und durch den Terrainschnitt TT gegeben sei. Ferner wählen wir willkürlich drei Gerade in dieser Ebene als Axen dreier Ebenenbüschel und bezeichnen dieselben mit $A(A)$, $A_1(A_1)$, $A_2(A_2)$, zugleich verzeichnen wir die durch diese Gerade hindurchgelegten Verticalebenen, indem wir Lothe aus den drei Fluchtpunkten errichten bis zum

Schnitt im Horizont, und von diesen letzteren aus ziehen wir die Terrainspuren der Verticalebenen. Da die Ebenen ε, $\varepsilon_{,}$, $\varepsilon_{,,}$ auf einander fallen sollen, können wir nur noch die Ebenen

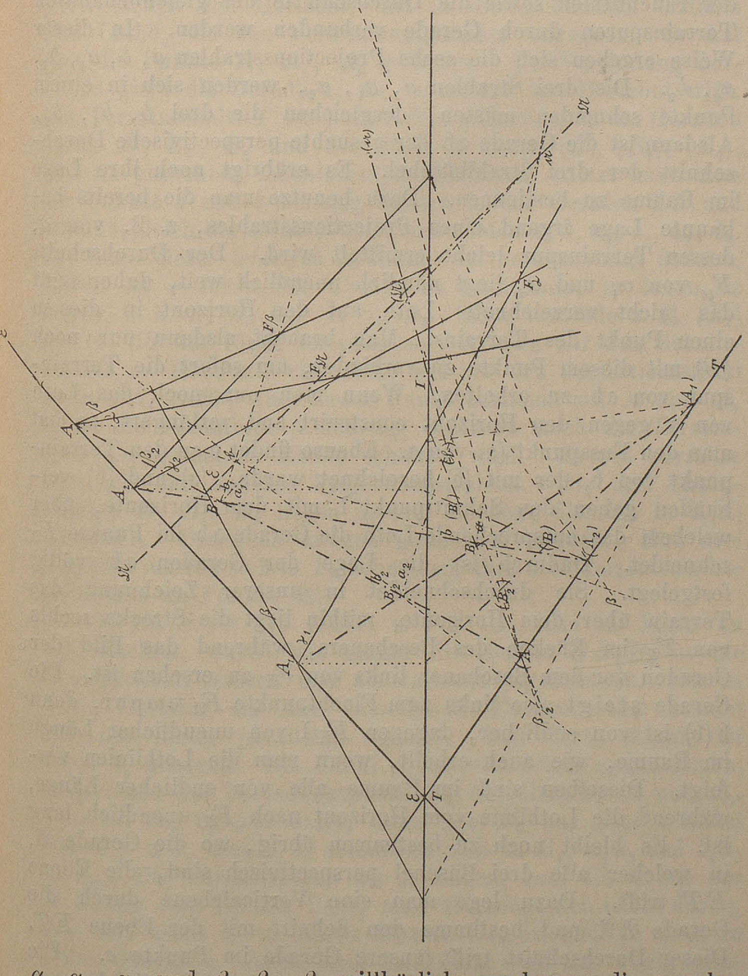


Fig. 13.

α, α_1, α_2 und β, β_1, β_2 willkürlich annehmen; diese sechs Ebenen verzeichnen wir durch ihre Fluchtlinien und Terrainspuren. Je zwei Ebenenbüschel sind mit einander perspectivisch in einem Strahlbüschel. Die Centren der letzteren liegen offenbar in den Durchschnittspunkten je zweier Axen, in B, B_1, B_2. Ferner construiren wir die Durchschnitte der entsprechenden Ebenen, indem erst die Durchschnitte je zweier entsprechender Fluchtlinien sowie die Durchschnitte der gleichbenannten Terrainspuren durch Gerade verbunden werden. In dieser Weise ergeben sich die sechs Projectionsstrahlen a, b, a_1, b_1, a_2, b_2. Die drei Strahlen a, a_1, a_2, werden sich in einem Punkte schneiden müssen, desgleichen die drei b, b_1, b_2. Alsdann ist die Gerade $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ der gesuchte perspectivische Durchschnitt der drei Strahlbüschel. Es erübrigt noch ihre Lage im Raume zu bestimmen. Dazu benutze man die bereits bekannte Lage irgend eines Projectionsstrahles, z. B. von a, dessen Terrainspur leicht ermittelt wird. Der Durchschnitt F_α von α_1 und α_2 liegt nämlich unendlich weit, daher trifft das (nicht verzeichnete) Loth auf den Horizont in diesem einen Punkt des Terrains. Man braucht alsdann nur noch (B) mit diesem Punkte zu verbinden, um sofort die Terrainspur von $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ zu erhalten. Wenn man nur noch das Loth von $\mathfrak{a}$ gegen den Horizont construirt und verlängert, so hat man den Fusspunkt $(\mathfrak{a})$ von $\mathfrak{a}$. Ebenso findet man den Terrainpunkt von $\mathfrak{b}$, der mit $(\mathfrak{b})$ bezeichnet wurde. $(\mathfrak{a})$ und $(\mathfrak{b})$ verbunden geben den Schnittpunkt I mit dem Horizonte, über welchem das entsprechende Loth die Gerade $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ im Punkte $F_\mathfrak{A}$ schneidet. Dadurch ist die Lage der Geraden $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ völlig festgelegt. Sie durchschneidet in unserer Zeichnung das Terrain über dem Horizonte, mithin liegt die Strecke rechts von $F_\mathfrak{A}$ im Rücken des Beschauers, während das Bild der Geraden vor dem Beschauer links von $F_\mathfrak{A}$ zu ersehen ist. Die Gerade steigt also links zum Fluchtpunkte $F_\mathfrak{A}$ empor, denn $\mathfrak{b}\,(\mathfrak{b})$ ist von endlicher, dagegen $F_\mathfrak{A}$ I von unendlicher Länge im Raume, wie auch erhellt, wenn man die Lothlinien verfolgt. Dieselben sind im Raume alle von endlicher Länge, während die Lothlinie vom Horizont nach $F_\mathfrak{A}$ unendlich lang ist. Es bleibt noch zu bestimmen übrig, wo die Gerade $\mathfrak{A}$, in welcher alle drei Büschel perspectivisch sind, die Ebene ET trifft. Dazu lege man eine Verticalebene durch die Gerade $\mathfrak{A}\mathfrak{A}$ und bestimme den Schnitt mit der Ebene ET. Dieser Durchschnitt trifft unsere Gerade im Punkte e. (Die Constructionslinien haben wir fortgelassen aus der Zeichnung). Zur Uebung empfiehlt es sich sehr, die ganze Zeichnung in umgekehrter Folge auszuführen, d. h. man nehme zuerst eine Gerade $\mathfrak{A}\,(\mathfrak{A})$ an, verzeichne ihre Verticalebene, dann wähle man drei beliebige Punkte B, B_1, B_2, definire dieselben durch ihre Fusslothe (B), (B_1), (B_2), verbinde darauf sowohl die drei B, als auch ihre Fusspunkte mit einander. Die letzteren treffen den Horizont, und in diesen Punkten errichte man Lothe, die den Verbindungsgeraden begegnen. So hat man die Punkte A, A_1, A_2 gefunden. Die Verbindung derselben giebt die Gerade ε, die wiederum den Horizont trifft. Der Terrainschnitt T ist jetzt sofort gefunden, da die Geraden durch B, B_1, B_2 und die Geraden durch (B), (B_1), (B_2), sich im gesuchten Terrainschnitt schneiden. Jetzt kann man die Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ beliebig wählen in der Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{A}$ und erhält sogleich die sechs Projectionsstrahlen a, b, a_1, b_1, a_2, b_2. Die Lage dieser letzteren im Raume ist bereits völlig definirt, mithin ist es leicht, die Ebenen zu bestimmen, in denen sie liegen, d. h. α, α_1, α_2, β, β_1, β_2. Man verbinde z. B. (B_1) mit $(\mathfrak{b})$ [in der Figur fortgelassen], errichte auf dem Schnittpunkte im Horizonte ein Loth, welches den Projectionsstrahl $\mathfrak{b}_1$ in $F\beta_1$ treffe, und dieser Punkt bestimmt mit A und A_1 sofort die Fluchtlinie β und β_2, wodurch auch die Terrainspur der gesuchten Ebene erhalten wird. Ebenso verfahre man mit den anderen Projectionsstrahlen. Die drei Strahlbüschel B, B_1, B_2 liegen in drei Ebenen, die sich in $\mathfrak{A}(\mathfrak{A})$ schneiden. Dieselben können gezeichnet werden. Ihre drei Fluchten müssen sich in $F_{\mathfrak{A}}$ schneiden, ihre drei Terrainschnitte gleichfalls im Punkte $(\mathfrak{A})$.

15) *Zu S. 99 III links*, s. Fig. 14. Um die Figur zu vereinfachen, wurde wie früher die Gerade BB_2B_1 in die Unendlichkeit versetzt und als Horizont angenommen. Das in dieser Geraden als Axe entstehende Ebenenbüschel besteht also aus lauter parallelen Ebenen. Die vierte Gerade ist durch $\mathfrak{a}_4$ gezogen. Der Punkt $\mathfrak{a}_4$ ist willkürlich angenommen, desgleichen der Projectionspunkt B_6 der Geraden A und A_4. Nun ist das System fixirt, denn von B_6 aus über b findet man b_4; $a_2 a_3$ und $b_2 b_3$ schneiden sich in B_4, $a_1 a_3$ und $b_1 b_3$ in B_5. Die Terrainspuren der B zeigen, dass die Ebene der B unter dem Terrain liegt; man überzeugt sich leicht davon, dass alle sechs B in einer Ebene liegen und je drei in einer Geraden. Auch diese Zeichnung wird nur wenig complicirter, wenn die Gerade BB_1B_2 eine beliebige Richtung erhält und im Endlichen liegt. Man drehe das Blatt um einen Winkel, nehme einen neuen Horizont an, behalte die ganze Zeichnung bei, bis auf die Fusslothe, construire dieselben von

Neuem. Die $\mathfrak{a}$-Punkte können bleiben, nur $\mathfrak{a}_4$ erhält ein beliebig langes neues Fussloth und ein neues (D) wird irgendwo in der durch D streichenden Lothlinie angenommen.

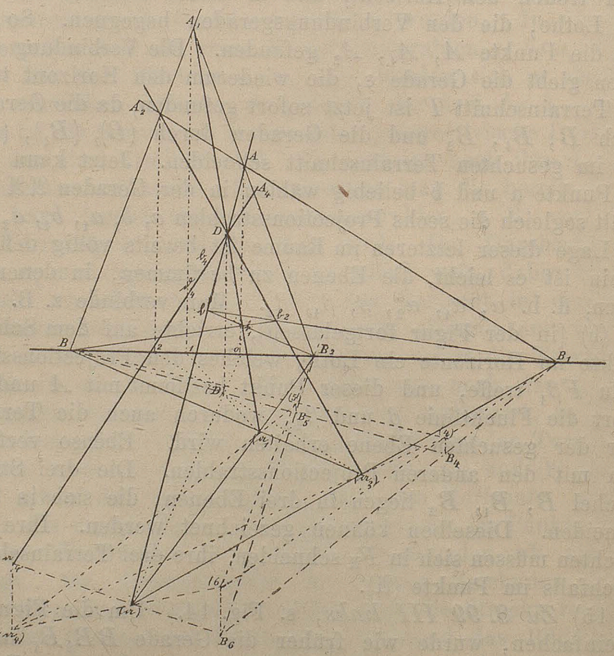
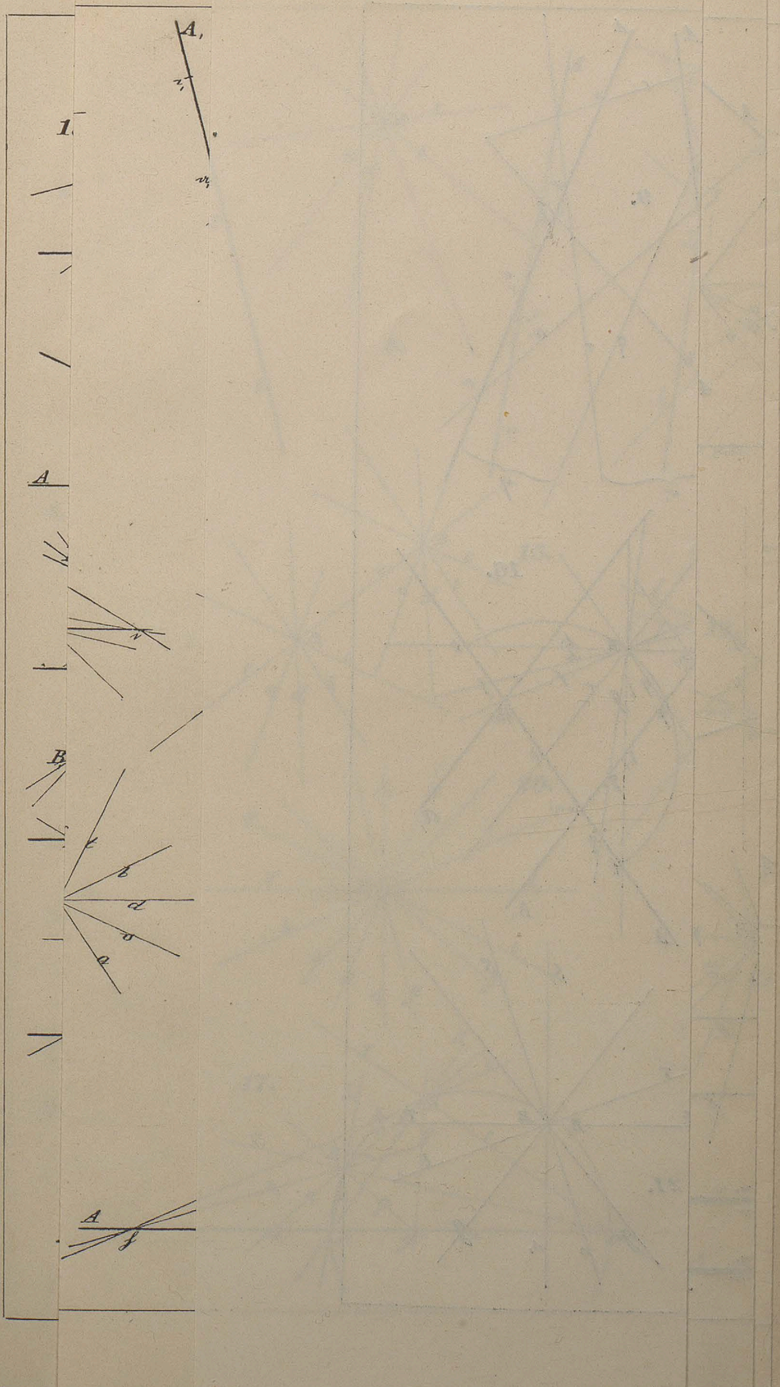
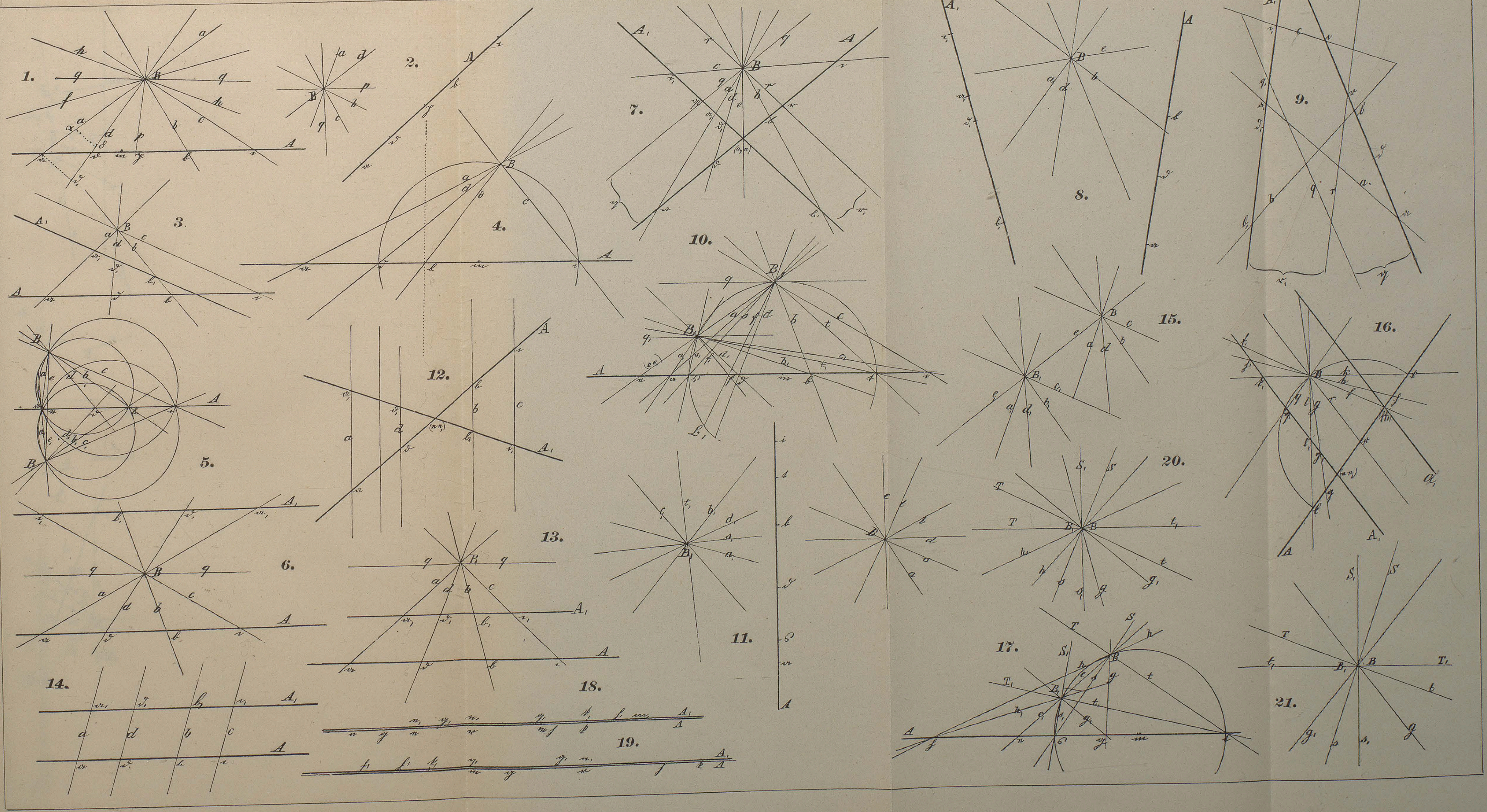


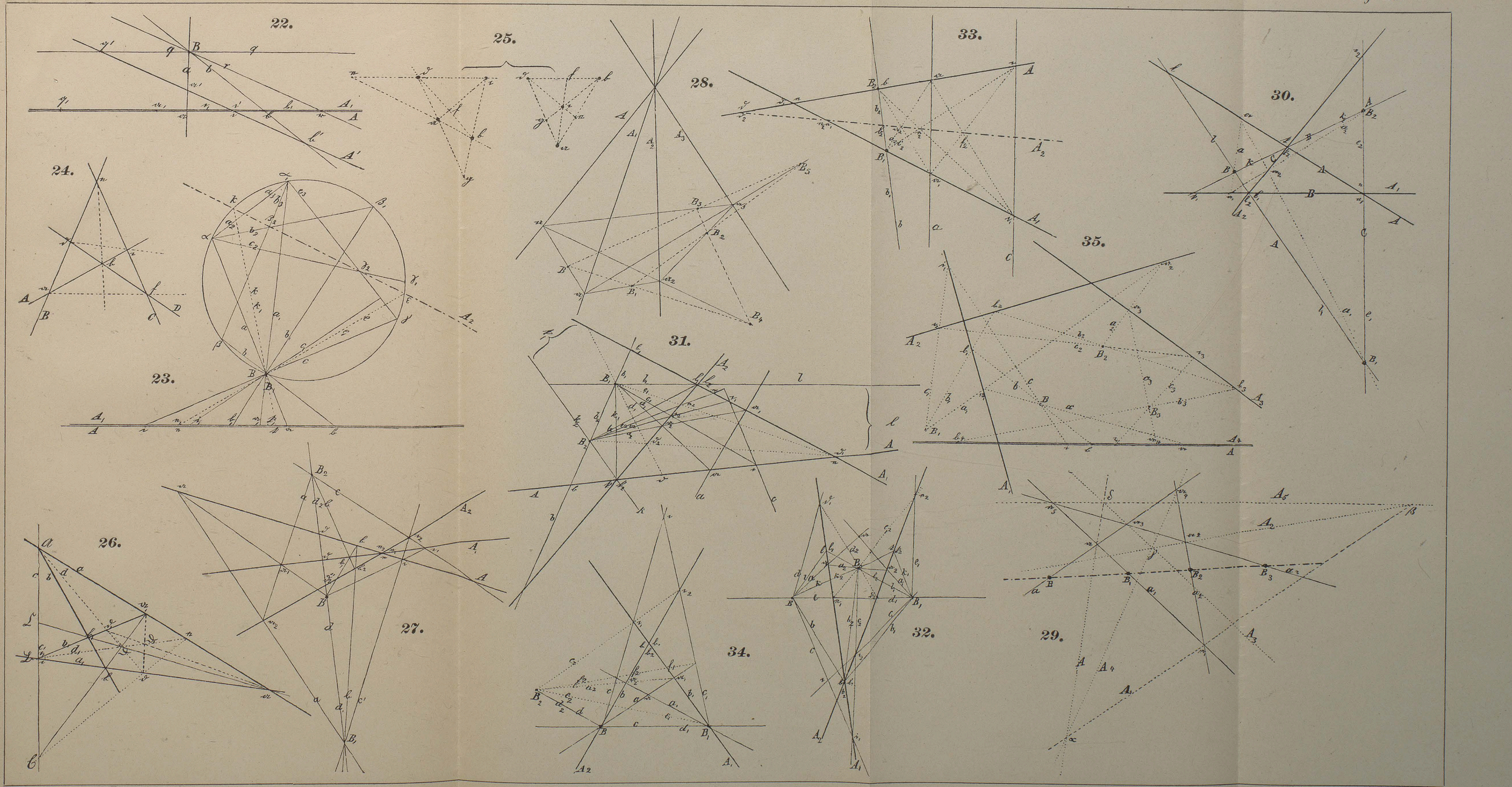
Fig. 14.

16) *Zu S. 99 III rechts.* Die Construction wird äusserst verwickelt, aber sie ist durchführbar, wenn man die charakteristischen Punkte und Linien des Satzes II rechts als fertig ansieht und nun die vierte Linie hinzufügt.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.






22.
25.
28.
33.
30.
24.
23.
35.
31.
26.
27.
34.
32.
29.

LITTERIS

STEINER, ABHÄNGIGKEIT GEOMETRISCHER GESTALTEN 1. 82